Chapter 4. 轉動力學 ROTATIONAL DYNAMICS

1. 轉動力學是以極座標來定義之物理量

移動 (Translation)	轉動 (Rotation)
$(x, y) \longrightarrow$ 直角座標	$(r, \theta) \longrightarrow$ 極座標
<1> 長度單位 $s = r\,\theta$ $\overset{r\,\times}{\longleftarrow}$ $\Delta s = \Delta x = r \cdot \Delta\theta$	角度位移 $\Delta\theta$ (弳度radian) (Angle) $1\ rad = \dfrac{360^\circ}{2\pi}$
<2> 速度 $V = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{r \cdot \Delta\theta}{\Delta t} = r \cdot \omega$ $\overset{r\,\times}{\longleftarrow}$	角速度 $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (角頻率) (Angular Velocity)

<3> 加速度 $a=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{r\cdot\Delta\omega}{\Delta t}=r\cdot\alpha$ **(向心加速度)** $a_r=\frac{V^2}{r}=\frac{(r\omega)}{r}=r\cdot\omega^2$ $r\times\longleftarrow$	**角加速度 (Angular Acceleration)** $\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
<3>等加速度運動方程式: $(a=const=a_0)$ $V=V_0+a_0t$ $x-x_0=\bar{V}t=\frac{V+V_0}{2}t$ $x-x_0=V_0t+\frac{1}{2}a_0t^2$ $x-x_0=\frac{V^2-V_0^2}{2a_0}$	**等角加速度運動方程式:** $(\alpha=const=\alpha_0)$ $\omega=\omega_0+\alpha_0t$ $\theta-\theta_0=\bar{\omega}t=\frac{\omega+\omega_0}{2}t$ $\theta-\theta_0=\omega_0t+\frac{1}{2}\alpha_0t^2$ $\theta-\theta_0=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\alpha_0}$

<5> 慣性質量 m $\times$ r^2 $\Rightarrow$	慣性轉動量 $I = m\,r^2$ (Moment of Inertia)

<6> 力 $\boldsymbol{F = ma}$ $\times$ $\boldsymbol{r}$ $\Rightarrow$

$$F = ma$$
$$\tau = I\alpha$$

力矩 $\tau = \bar{r} \times \bar{F} = |\bar{r}||\bar{F}|\sin\theta$

$$= |\bar{r}|\sin\theta|\bar{F}|$$
$$= r_{\perp} \cdot |\bar{F}|$$

當 $|\bar{r}| \perp |\bar{F}|$ $(\theta = 90°, \sin\theta = 1)$

$$\tau = |\bar{r}||\bar{F}| = r \cdot ma = r \cdot m \cdot (r \cdot \alpha)$$
$$\boldsymbol{= mr^2\alpha = I \cdot \alpha}$$

($F = ma$ 之轉動版)

<7> 動量 $\vec{P}=m\vec{v}$ $\xrightarrow{\times r}$ $\bar{P}=m\bar{v}$ $L=I\omega$	角動量 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=\lvert\vec{r}\rvert\lvert\vec{P}\rvert\sin\theta=\lvert\vec{r}\rvert\lvert\vec{P}\rvert$ $=r\cdot mv=r\cdot m(r\omega)$ $=mr^2\cdot\omega=I\cdot\omega$
動量守恆 $\sum_i F_i=0$ $\rightarrow P_i=P_f$ $\sum_i m_i v_i=\sum_f m_f v_f$	角動量守恆 $\sum_i \tau_i=0$ $\rightarrow L_i=L_f$ $I_i\cdot\omega_i=I_f\cdot\omega_f$
<8> 動能 $K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(r\cdot\omega)^2$ $=\frac{1}{2}mr^2\cdot\omega^2$ $=\frac{1}{2}I\omega^2$	轉動能 $K_r=\frac{1}{2}I\omega^2$ 能量是純量，在不同的座標定義，是可完全互換

2. 幾種常見對稱物體之轉動慣性量（I）

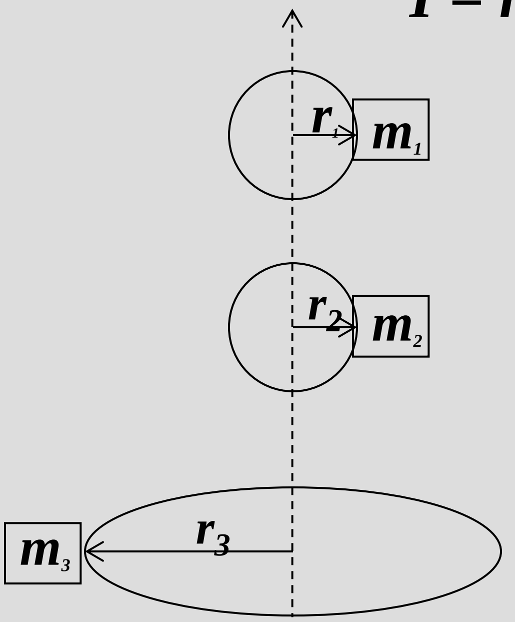
$\rightarrow \quad I = mr^2$ (單一質點或物體)

$= \sum_i m_i r_i^2$ (多個質點或物體)

$= \int r^2 dm$ (連續質量分布)

$$I_{c.m.} = \frac{1}{12} ML^2$$

$I = mr^2$



$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = \sum_i m_i r_i^2$$

<1> 細棍 (*Thin Rod*, $I_{c.m.} = \frac{1}{12} ML^2$)

質量均勻分布在L的長度上

$$\frac{M}{L} = \frac{dm}{dx} = \lambda$$ 〔一度空間的質量密度〕

= Constant (均勻)

$$\frac{dm}{dA} = \sigma$$ 〔二度空間的質量密度〕

$$\frac{dm}{dV} = \rho$$ 〔三度空間的質量密度〕

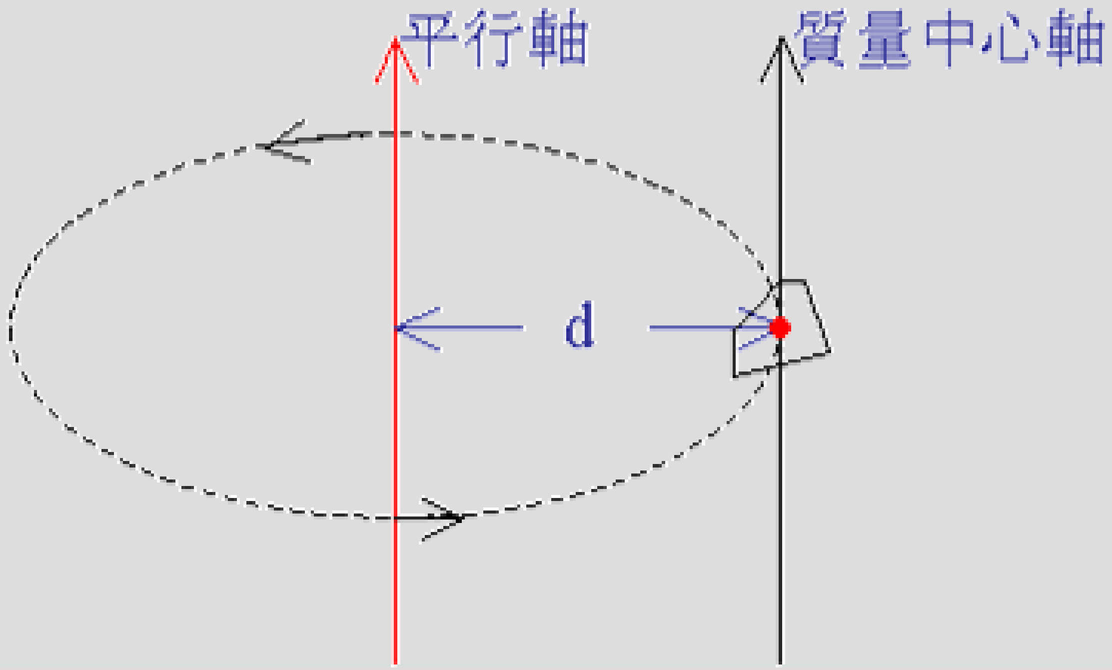
$$I_{c.m.} = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm$$ 〔對質量中心軸轉動〕

$$= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 (\lambda \cdot dx) \quad [dm = \lambda\, dx]$$

$$= \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{12} ML^2$$

☆ 平行軸原理 (Parallel-Axis Theorem)

→ 處理轉動軸是平行於質量中心軸之慣性轉動量

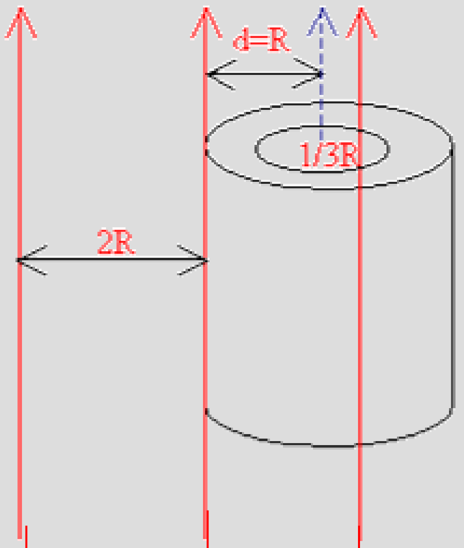


$$I_{自轉} + I_{公轉} = I_{物\text{-}軸}$$

$$I_{c.m} + Md^2 = I_{平行軸}$$

$$\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

<2> 空心圓柱體 (Hollow Cylinder, $I = MR^2$)



質量均勻分布在外圍

$$I_{c.m} = \sum_i m_i r_i^2$$ 〔將圓柱邊緣等分成多個小質量物體〕

$$= \sum_i m_i R^2$$ 〔$r_i = R$, ∵圓周上質量離圓心皆為R〕

$$= R^2 \sum_i m_i = MR^2$$

$$I_{c.m} + Md^2 = I_{平行軸}$$

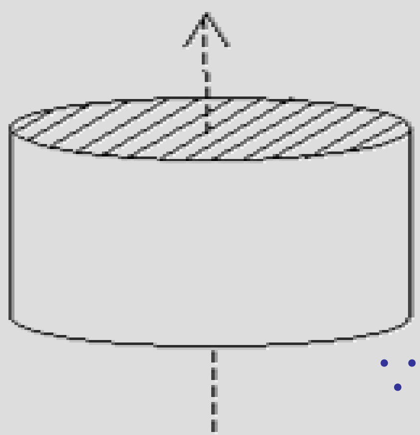
$$MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

$$MR^2 + M(3R)^2 = 10MR^2$$

$$MR^2 + M\left(\frac{1}{3}R\right)^2 = \frac{10}{9}MR^2$$

<3> 實心圓柱體 (Solid Cylinder, $I_{c.m.}=\frac{1}{2}MR^2$)

同體積、同質量之空心及實心圓柱體之慣性轉動量，孰大？



$I_{空心圓柱} > I_{實心圓柱}$

（不易轉）　（易轉）

$$=MR^2>\frac{1}{2}MR^2$$

∵空心圓柱全部質量分布在外圍，其外圍轉動半徑量皆為R。
實心圓柱的一半質量分部外圍，一半質量分布在內部
∴其內部轉動半徑量

$$0\le r<R\rightarrow\overline{r^2}=\frac{0^2+R^2}{2}=\frac{1}{2}R^2$$

<4> 空心球 (Hollow Sphere)；實心球 (Solid Sphere)

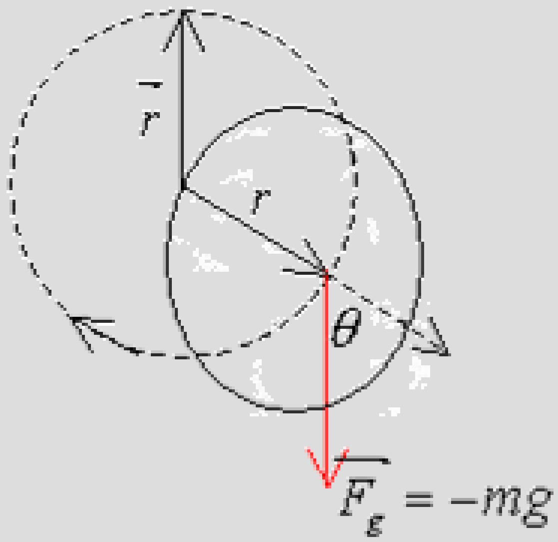
$$I_{空心球} > I_{實心球}$$

$$\frac{2}{3}MR^2 > \frac{2}{5}MR^2$$

（不易轉）　（易轉）

3. 轉動物體在簡諧運動的運用

→ 物擺 (Physical Pendulum；實際物體的單擺運動)



$$\tau = \bar{\tau} \times \bar{F}_g = |\bar{r}||\bar{F}_g| \sin\theta$$
$$= -r \cdot mg \sin\theta = -dmg \sin\theta$$

當 θ很小 ⟶ $\sin\theta \cong \theta$

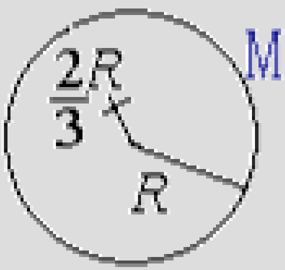
$$\tau = I\alpha \cong -mgd\theta = -c\theta$$

$$F_y = ma_y = -ky \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{c}{I}}$$

$$\rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{I}} = \sqrt{\frac{mgd}{I_{平行軸}}}$$

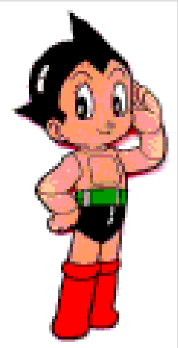
例10：實心圓柱體之固定軸離圓心$\frac{2}{3}R$作物擺運動,求$\omega=?, T=?$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgd}{I_{平行軸}}}=\sqrt{\frac{m\cdot g\cdot\frac{2}{3}R}{I_{c.m.}+Md^2}}=\sqrt{\frac{M\cdot g\cdot\frac{2}{3}R}{{}^1\!/_2\,MR^2+M(\frac{2}{3}R)^2}}=?$$



實心圓柱體

請回家練習!



4. 靜力平衡 (Static Equilibrium)

→ 須符合下列 2種平衡

<1> 移動平衡 (Translational Equilibrium)

→ $$\sum_i F_i = 0$$ (整個系統所有合力為0)

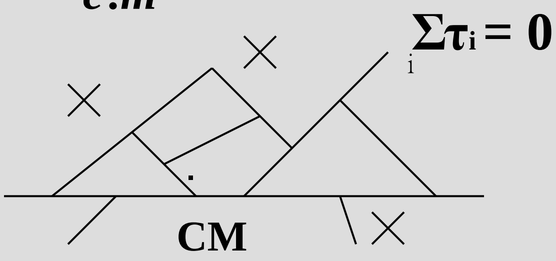
$$= F_{c.m} = Ma_{c.m} = 0 \longrightarrow a_{c.m} = 0$$

<2> 轉動平衡 (Rotational Equilibrium)

→ $$\sum_i \tau_i = 0$$ （整個系統所有合力矩為0）

$$= \tau_{c.m} = I_{c.m}\alpha_{c.m} = 0 \Rightarrow \alpha_{c.m} = 0$$

對任一支點 (軸) $$\sum_i \tau_i = 0$$

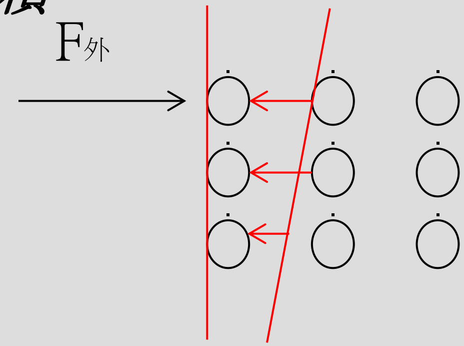


5. 應力 (Stress) 與 應變 (Strain)

→ 外力作用於物體，使物體變形，外力消失。
物體內部原子晶格之回應力（稱之內力）而單位面積上的內力稱之應力(Stress)

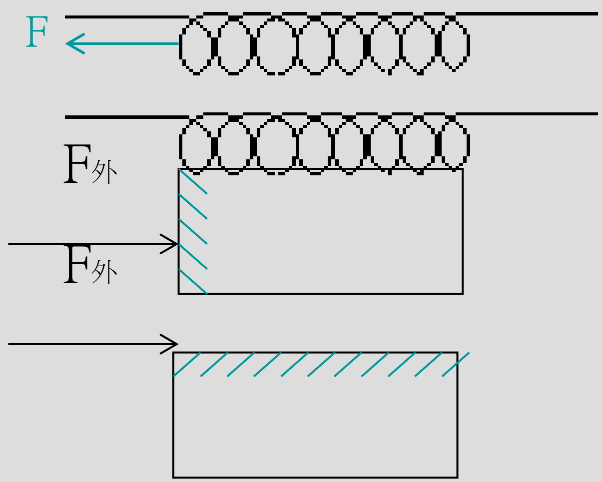
$$\sigma(Stress) = \frac{內力}{截面積} = \frac{F}{A}$$

(與壓力定義相同，P (壓力) = $\frac{外力}{截面積}$)



應力

- 正應力 (Normal Stress) → $F \perp$ 截面積
  - 張應力 (Tensile Stress)
  - 壓應力 (Compressive Stress)
- 切應力 (Shear Stress) → F平行切於截面積



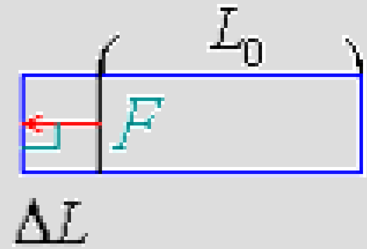
張應力

壓應力

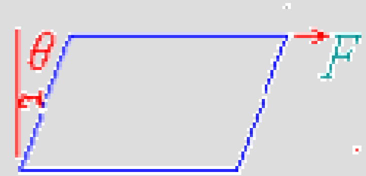
切應力

應變(Strain)→外力使物體的變形量比

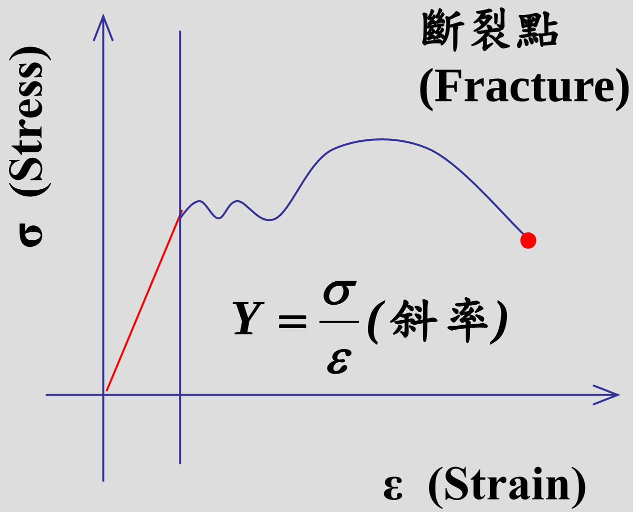
正應變 (NORMALSTRAIN) → $\varepsilon_n = \dfrac{\Delta L}{L_0}$



切應變 (SHEARSTRAIN) → $\varepsilon_S = \tan\theta$



當物體的應變較小，物體易於恢復原狀，應力和應變有近乎線性關係，此線性斜率稱之楊氏係數(*Young's Modulus*)。



※ 彈簧常數可由楊氏係數來決定

$$\rightarrow \quad Y = \frac{\sigma}{\varepsilon_n} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L_0}}$$

$$\rightarrow \quad F = k \cdot \Delta L \text{ (虎克定律)}$$