Chapter 3 動力學 DYNAMICS

1.動力學 → 研究力與運動物理量的關係。

$(\vec{x}, \vec{V}_x, \vec{a}_x, t)$ → 運動學相關物理量

$(\vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x$ ， $\vec{P}_x = m \cdot \vec{V}_x$ ， $K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_x^{\,2})$ → 力相關物理量

動力學

力　　動量　　動能

$$= \frac{\Delta \vec{P}_x}{\Delta t}$$ 單位時間動量的變化量＝力

$$= -\frac{dU}{dx}$$ 保守力＝使能量守衡的力　*U*＝位能

2. 力 (Force)

<1> 接觸力 (Contact Force)

→ 藉著接觸物體表面，將力機械式傳達。

例： 摩擦力、施力。

<2> 非接觸力(Noncontact Force)

→ 不需接觸物體表面，隔著空間將力傳達。

例： 重力F_G，電力F_E，磁力F_B。

3. 牛頓的力之三大定律

<1> 慣性定律 (Law of Inertia) ($\vec{a}=0 \rightarrow \vec{F}=0$)
(無力定律)

$(\vec{V}=0$， $\vec{V}=const\neq 0)$ → $(\Delta\vec{V}=0)$

靜者恆靜，動者恆動　　等速度運動

$$\vec{a}=\frac{\Delta V}{\Delta t}=0 \qquad \vec{F}=m\cdot\vec{a}=0$$

$\rightarrow$ $\vec{F}=0$ $\rightarrow$ $\vec{a}=0$ ⟹ $\vec{V}=const$

〔合力為零〕　不受外力　　獨立系統

<2> 加速度定律 ($\vec{a} \neq 0 \rightarrow \vec{F} \neq 0$) (有力定律)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = m \cdot \frac{(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}{\Delta t}$$

$$= \frac{m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1}{\Delta t} \qquad [\vec{P} = m \cdot \vec{V}]$$

$$= \frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

(動量，Momentum)

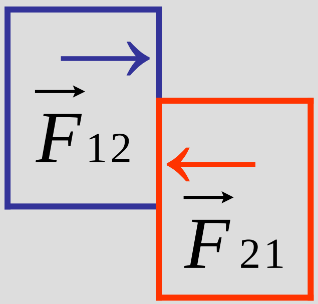
$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{P}$$

(衝量，Impulse)

<3> 反作用力定律

作用力和反作用力大小相等，方向相反，卻不能抵消。

$(|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|)$ $(\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21})$ 因為力分別作用在不同的物體上



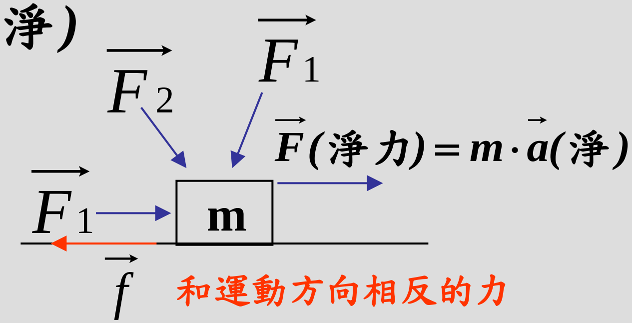
	數值	方向	接觸點
作用力	$\lvert\vec{F}_{12}\rvert$	$1 \rightarrow 2$	2
反作用力	$\lvert\vec{F}_{21}\rvert$	$2 \rightarrow 1$	1

4. 動力方程式

$$\vec{F}(\text{淨力})=\sum_i \vec{F}_i\,(\text{合力})+\vec{f}(\text{摩擦力})=m\vec{a}(\text{淨})$$

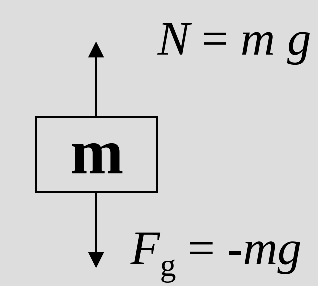
N：正向力 (NORMAL FORCE)

→ 接觸面給予物體反作用力，<u>垂直</u>於接觸面



摩擦力(Friction Force)與運動方向相反的力

- 靜摩擦 (Static) $\vec{f}_s=\mu_s\cdot N$
- 動摩擦 (Kinetic) $\vec{f}_k=\mu_k\cdot N$



$$\vec{f}_s > \vec{f}_k \quad \therefore \quad \mu_s > \mu_k$$

（靜摩擦係數 ＞ 動摩擦係數）

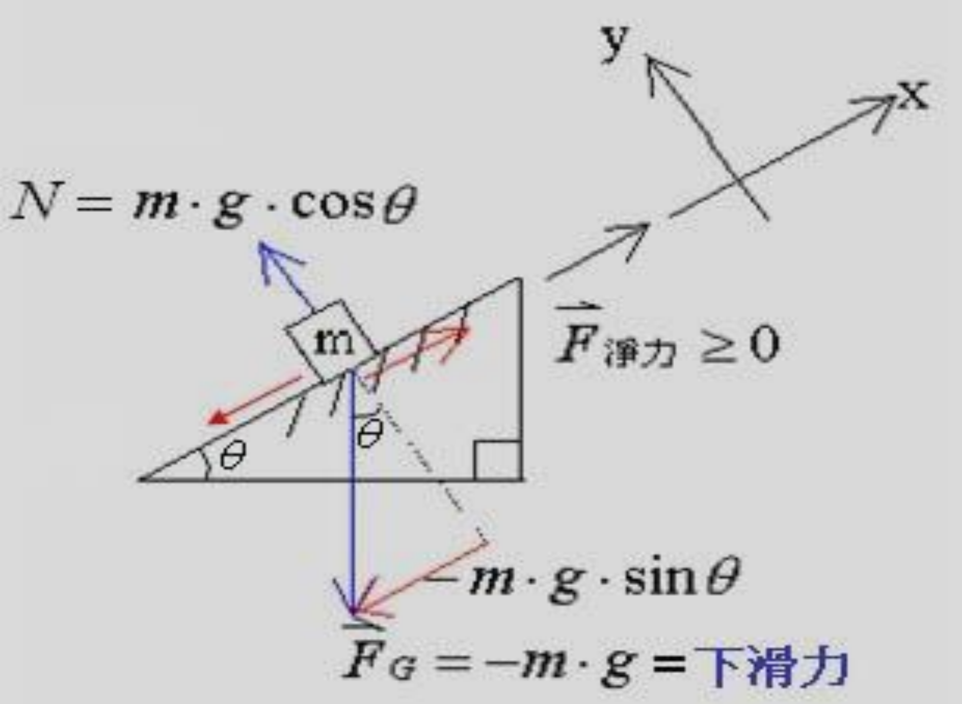
5. 物體在斜坡上不致下滑的條件

☆ 使物體下滑力 $= -m \cdot g \cdot \sin\theta$ （朝向－x方向）

☆ 阻止物體下滑的力 = 靜摩擦力 (朝向＋x 方向)

$$= \vec{f}_s = \mu_s \cdot N$$

$$= \mu_s \cdot m \cdot g \cdot \cos\theta$$



動力方程式：$\vec{F}_{淨力} = \sum_i \vec{F}_i + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_{淨}$

$$= (-m \cdot g \cdot \sin\theta) + \mu_s \cdot m \cdot g \cdot \cos\theta \geq 0$$

(不致下滑朝向+X方向)

$$-m \cdot g \cdot \sin\theta + \mu_s \cdot m \cdot g \cdot \cos\theta \geq 0$$

$$\mu_s \cdot m \cdot g \cdot \cos\theta \geq m \cdot g \cdot \sin\theta$$

$$\mu_s \geq \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\mu_s \geq \tan\theta$$

靜摩擦係數 大於 斜面角度的正切函數就不會下滑。

6. 汽車繞行彎道不致打滑的條件

☆ 使汽車打滑的力

= 離心力 = $m \cdot \dfrac{V^2}{R}$ (朝+X方向)

等速率圓周運動：

向心力 = − 離心力

$$m \cdot \vec{a}_R = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

☆ 阻止汽車打滑的力

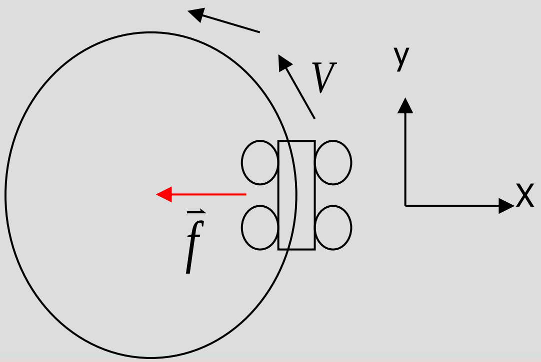
= 靜摩擦力

[任一時刻汽車朝 y方向移動，並無對 x 軸運動，汽車對 x 軸是靜止的]

$$= -\mu_S \cdot N$$

（朝− X方向）

$$= -\mu_S \cdot m \cdot g$$



動力方程式： $\vec{F}_{淨力} = \sum \vec{F} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_{淨}$

$$= m \cdot \frac{V^2}{R} + (-\mu_S \cdot m \cdot g) \leq 0$$ （朝-X方向)

$$m \cdot \frac{V^2}{R} \leq \mu_S \cdot m \cdot g$$

$$\mu_S \geq \frac{V^2}{gR}$$

$$V^2 \leq \mu_S \cdot g \cdot R$$

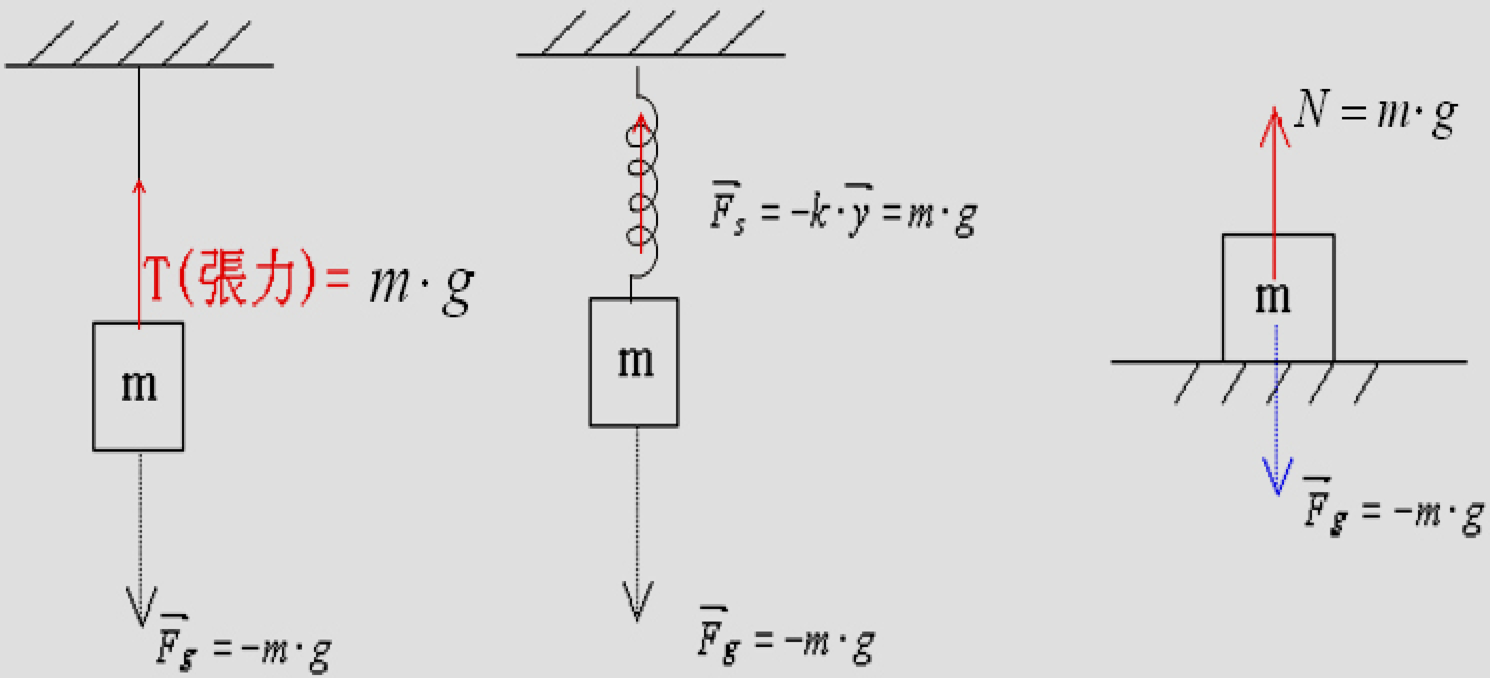
$$V \leq \sqrt{\mu_S \cdot g \cdot R} = V_{MAX}$$

R增加，V_{MAX}增加，不易打滑

R減少，V_{MAX}減低，容易打滑

7. 繩索之張力(Tension) / 彈簧之回復力 / 正向力

→ 皆是 反作用力



8. 機械能守恆 [能量守恆]

➡ 力和能量的關係式

機械能 $E = U$ (位能) + K (動能)　(Potential Energy)

能量守恆 E = Constant　(Kinetic Energy)

$$\Delta E = 0$$

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K = 0$$

$$\Delta U = -\Delta K$$

$$\boxed{\Delta K = -\Delta U}$$

+	−	−	動能增加	→	位能減少
−	−	+	動能減少	→	位能增加

☆ $\boxed{\Delta K = \Delta W}$

−	−	作負功	→	動能減少
+	+	作正功	→	動能增加

Advanced Technology & Integrated Systems Laboratory

從運動方程式第四式推導出 $\Delta K = \Delta W$

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = \frac{V_x^{\ 2} - V_{x0}^{\ 2}}{2a_x}$$

$$2a_x(\vec{x} - \vec{x}_0) = 2a_x \cdot \Delta\vec{x} = V_x^{\ 2} - V_{x0}^{\ 2}$$

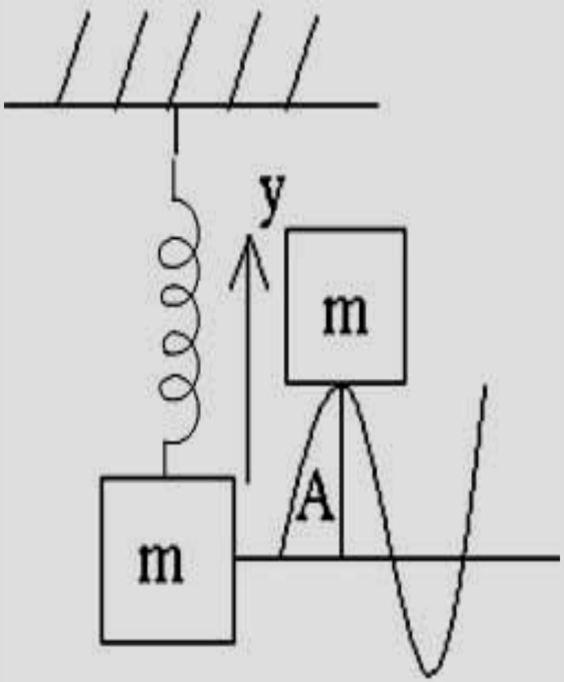
$$\times \frac{1}{2}m$$

$$\frac{1}{2}m \cdot 2a_x \cdot \Delta\vec{x} = \frac{1}{2}m \cdot (V_x^{\ 2} - V_{x0}^{\ 2})$$

$$m \cdot a_x \cdot \Delta\vec{x} = \frac{1}{2}m \cdot V_x^{\ 2} - \frac{1}{2}m \cdot V_{x0}^{\ 2}$$

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = K_f - K_i \quad \Rightarrow \quad \Delta W = \Delta K$$

續簡諧運動:



$$\vec{F}_y = -k_s \cdot \vec{y}$$

$$U_s = \frac{1}{2} k_s \cdot y^2$$

$$E = U_s + K = \frac{1}{2} k_s \cdot A^2 \qquad (\text{最高/低點} \Rightarrow K = 0)$$

$$E = U_s + K = K \qquad (\text{中心點}，U = 0)$$

$$= \frac{1}{2} k_s \cdot A^2 = \frac{1}{2} m \cdot V_{MAX}^2$$

$$V_{MAX} = \sqrt{\frac{k_S}{m}} \cdot A = \omega \cdot A$$

☆ 保守力 (Conservative Force) ➡ 能使機械能守恆的力

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\Delta U}{\Delta x}} \xrightarrow[\Delta \to d]{\text{微分量}} \boxed{\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{dU(x)}{dx} \\ U(x) &= -\int dU(x) \\ U(x) &= -\int \vec{F} \cdot dx \end{aligned}}$$

知位能求力

知力求位能

$$\Delta K = \Delta W = -\Delta U$$

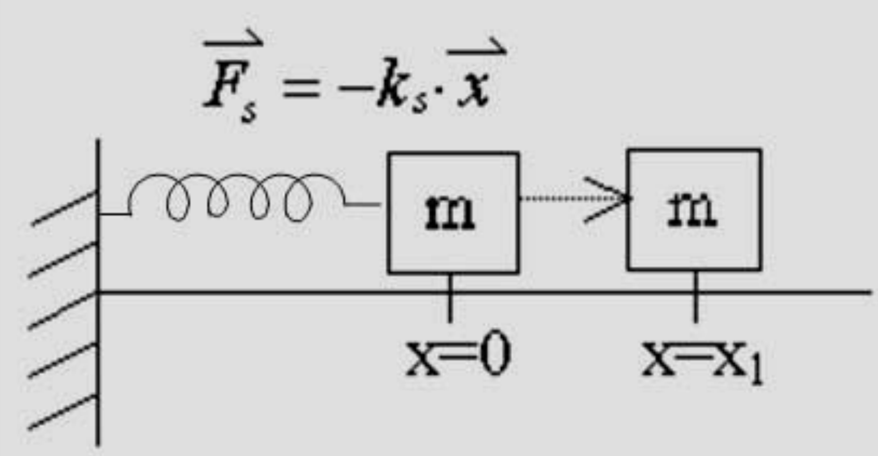
ΔK	ΔW	$-\Delta U$
+	+	−
−	−	+

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = -\Delta U$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

9. 彈性位能 $U_s(x)$

→ 因彈簧力是保守力



$$U_S(x_1) = -\int_0^{x_1} \overrightarrow{F_S}\, dx = -\int_0^{x_1} (-k_S \cdot x)\, dx = k_S \int_0^{x_1} x\, dx$$

$$= k_S \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_1} = k_S \left[\frac{x_1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{k_S}{2} x_1^2$$

簡諧運動，彈簧上下震動任一點 $y=y_1$

$$K = E - U = \frac{1}{2}k_s \cdot A^2 - \frac{1}{2}k_s \cdot {y_1}^2 = \frac{1}{2}m \cdot V^2$$

$$V^2 = \frac{k}{m}(A^2 - {y_1}^2)$$

$$V = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{(A^2 - {y_1}^2)} = \omega \cdot A \cdot \cos\theta = V_{\max} \cdot \cos\theta$$

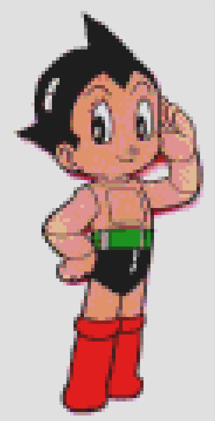
例題6. $y(t)=6\cdot\sin 3t$是彈簧所掛質量($m=2kg$)的S.H.M.之位移函數，

(1)求：k(彈簧常數) / T(週期) / V_{MAX} / a_{MAX} / E。

(2)求：$y(t)=3$時，V_y / $\vec{a}_y$ / $\vec{F}_y$ / $\vec{P}_y$(動量) / K / U。

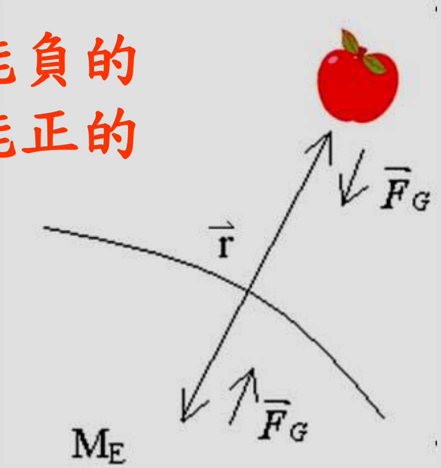
(3)求：$t=20$秒後，y_1 / $\vec{V}_y$ / $\vec{a}_y$ / $\vec{F}_y$ / U。

請回家練習！



10. 重力位能 $U_G = -\dfrac{G\cdot m\cdot M_E}{r}$

引力→位能負的
斥力→位能正的



➡ 地球重力是保守力

$$\vec{F}_G = \frac{G\cdot m\cdot M_E}{r^2}$$

$r\to\infty$ ， $\vec{F}_G \to 0$， $U_G(\infty)=0$

$$U_G(r) = -\int_r^\infty F_G\cdot dr = -\int_r^\infty \frac{G\cdot m\cdot M_E}{r^2}dr = -G\cdot m\cdot M_E\int_r^\infty \frac{1}{r^2}dr$$

$$= -G\cdot m\cdot M_E(-r^{-1}\big|_r^\infty) = G\cdot m\cdot M_E(\frac{1}{r}\big|_r^\infty) = G\cdot m\cdot M_E(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r})$$

$$= -\frac{G\cdot m\cdot M_E}{r}$$

物體靠近地球
受吸引力增強

$\vec{a}$ 上升 $\vec{V}$ 上升
K 上升 U 下降

在地面上至高度h內，重力為一常數　亦是保守力

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g} = const = \vec{F}_g$$

$$\vec{F}_g = -m \cdot g$$

近地面之重力位能

$$
\begin{aligned}
U_g(y) &= -\int_0^h F_g\, dy \\
&= -\int_0^h F_g\, dy \\
&= m \cdot g \int_0^h dy \\
&= m \cdot g \cdot y \Big|_0^h \\
&= m \cdot g \cdot h
\end{aligned}
$$

11. 星球的重力及重力場

地球質量 M_E；半徑 R_E

地球重力：

$$\vec{F}_G = \frac{G \cdot m \cdot M_E}{R_E{}^2}$$

$$= m \cdot g_E$$

地球重力場：

$$\vec{g}_E = \frac{G \cdot M_E}{R_E{}^2} = 9.8\, m/s^2$$

延伸別的星球

火星重力：

$$\vec{F}_{火} = \frac{G \cdot m \cdot M_{火}}{R_{火}^{\ 2}}$$

$$= m \cdot g_{火}$$

火星重力場：

$$\vec{g}_{火} = \frac{G \cdot M_{火}}{R_{火}^{\ 2}}$$

月球重力：

$$\vec{F}_{月} = \frac{G \cdot m \cdot M_{月}}{R_{月}^{\ 2}}$$

$$= m \cdot g_{月}$$

月球重力場：

$$\vec{g}_{月} = \frac{G \cdot M_{月}}{R_{月}^{\ 2}}$$

12. 衛星(Satellite)繞行地球之軌道速度(V_S)和脫離速度(V_{ESC})

衛星繞行地球 ➡ 作等速率圓周運動

衛星受地球重力 ➡ $F_G = \dfrac{G \cdot m \cdot M_E}{r^2}$

衛星圓周運動向心力 ➡ $F_r = \dfrac{m \cdot V_s^{\,2}}{r}$

兩力相等 $F_G = F_r$ ➡ $\dfrac{m \cdot V_s^{\,2}}{r} = \dfrac{G \cdot m \cdot M_E}{r^2}$

➡ $V_S^{\,2} = \dfrac{G \cdot M_E}{r}$

$V_S = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_E}{r}}$

衛星軌道速度和衛星質量無關，
與地球質量成正比

☆ 衛星離地面高度100 *miles* (= 160 *km* = 1.6×10^5 *m*)

$$r = R_E + h = 6.4\times10^6 = 1.6\times10^5 \cong 6.4\times10^6\, m \cong R_E$$

$$V_S = \sqrt{\frac{G\cdot M_E}{R_E}} = 7.8\, km/s = 17500\, mile/hour$$

繞行地球一周所需時間

$$T = \frac{2\pi\cdot R_E}{V_S} = 2\pi\cdot R_E\sqrt{\frac{R_E}{G\cdot M_E}} = 5.2\times10^3 s = 1.45\, hour$$

衛星脫離地球束縛前最小速度V_{ESC} → 脫離速度最小

（脫離地球後已無殘留之能量 $K=0$，$U=0$）

☆ 能量守恆 $E_{前} = E_{後}$ ⟶ $U_{前} + K_{前} = U_{後} + K_{後}$

$$-\frac{G \cdot m \cdot M_E}{r} + \frac{1}{2} m \cdot V_{ESC}^2 = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} m \cdot V_{ESC}^2 = \frac{G \cdot m \cdot M_E}{r}$$

$$V_{ESC}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M_E}{r}$$

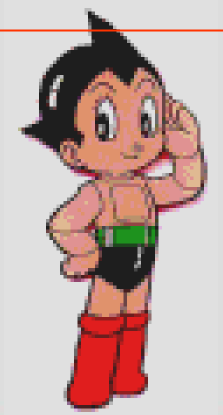
$$V_{ESC} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_E}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_E}{R_E}} = \sqrt{2}\, V_S = 11.2\ km/s$$

例題七：公元 2003 年，原子小金剛誕生於地球，它在地球上的重量是在α星球上的重量的 6 倍，若α星球星球密度是地球 1/12 倍，求

$\dfrac{R_\alpha}{R_E}$（半徑）$\dfrac{M_\alpha}{M_E}$（質量）$\dfrac{V_{S\alpha}}{V_{SE}}$（速度）$\dfrac{V_{ESC\alpha}}{V_{ESCE}}$（脫離速度）$\dfrac{K_\alpha}{K_E}$（動能）

$\dfrac{U_{G\alpha}}{U_{GE}}$（重力位能）$\dfrac{T_\alpha}{T_E}$（軌道週期）$\dfrac{\vec{V}_\alpha}{\vec{V}_E}$（體積)?

請回家練習!



13. 力 $(\vec{F})$ 和 $\begin{cases} \text{位移}(\vec{x}) \\ \text{速度}(\vec{v}) \\ \text{時間}(s) \end{cases}$ 做圖

$$\vec{F}\cdot\Delta t=\Delta\vec{P}$$

＝動量的變化量

＝衝量

曲線下面積所代表的物理量 $\begin{cases} \text{功} \quad (\Delta W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{x}) \quad (1) \\ \text{功率} \quad (\Delta P=\vec{F}\cdot\Delta\vec{v}) \quad (2) \\ \text{衝量} \quad (\Delta\vec{P}=\vec{F}\cdot\Delta t) \quad (3) \end{cases}$

$$\vec{F}\cdot\Delta\vec{V}=\Delta P$$

＝功率變化量

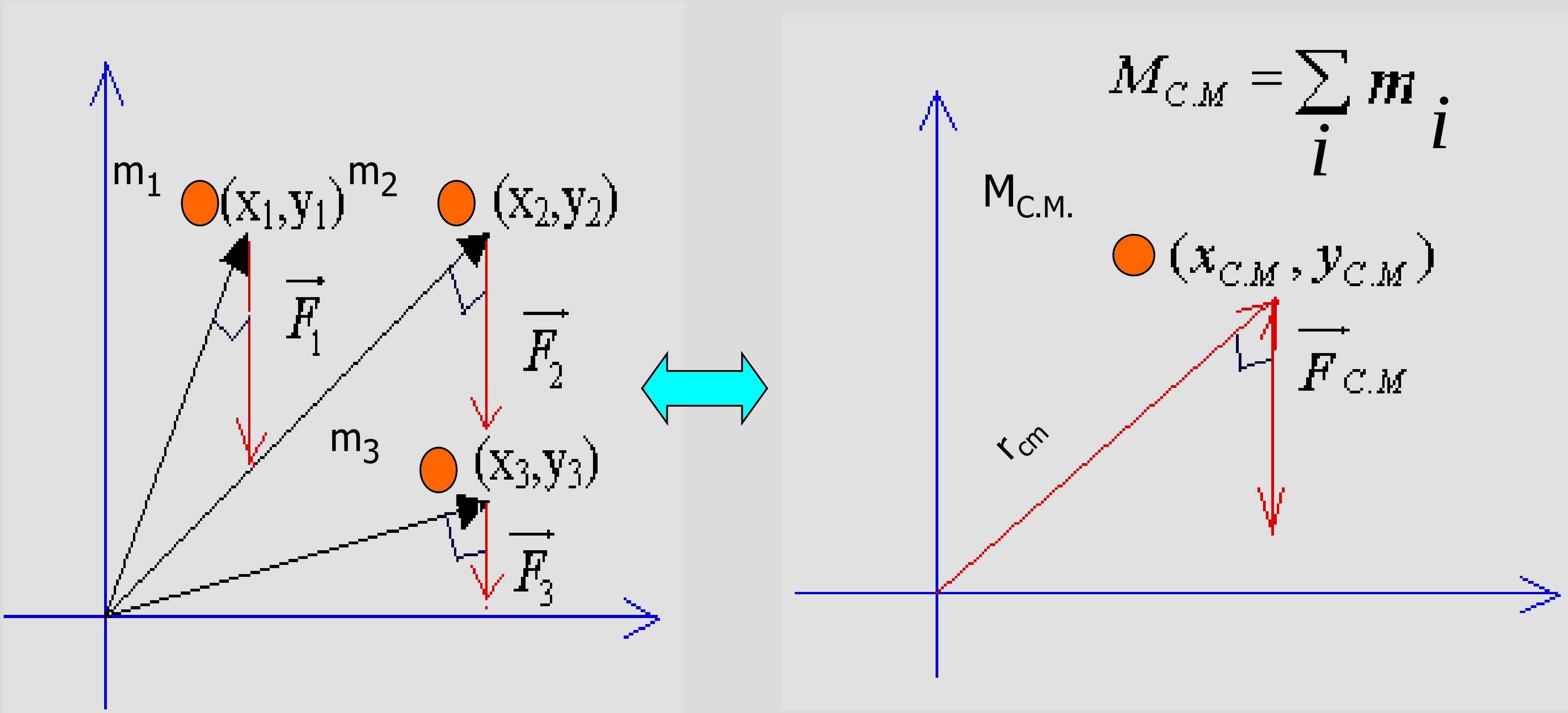
14. 質量中心 (Center of Mass, 簡稱 *C.M.*)

☆ 多個運動物體的系統，其系統的所有動力狀態，

可由一個中心點之動力來代表，

→ 此中心點是由重力及力矩平衡決定出來，

因與各運動物體之質量有關，故稱為質量中心。


m1
(x1,y1)
m2
(x2,y2)
F1
F2
m3
(x3,y3)
F3
$M_{C.M} = \sum_i m_i$
MC.M.
$(x_{C.M}, y_{C.M})$
$\vec{F}_{C.M}$
r cm

系統

質量 $\sum_i m_i \longleftrightarrow M_{C.M.}$

位移 $\left(\frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}\right) \longleftrightarrow (x_{C.M.}, y_{C.M.})$

速度 $\left(\frac{\sum_i m_i v_{ix}}{\sum_i m_i}, \frac{\sum_i m_i v_{ij}}{\sum_i m_i}\right) \longleftrightarrow (V_{C.M.X}, V_{C.M.Y})$

加速度 $\left(\frac{\sum_i m_i a_{ix}}{\sum_i m_i}, \frac{\sum_i m_i a_{ij}}{\sum_i m_i}\right) \xleftrightarrow[\text{可由質量中心動力狀態代入}]{\text{整個系統動力狀態}} (a_{C.M.X}, a_{C.M.Y})$

力 $\left(\sum_i m_i a_{ix}, \sum_i m_i a_{ij}\right) \longleftrightarrow (F_{C.M.X}, F_{C.M.Y})$

動量 $\left(\sum_i m_i v_{ix}, \sum_i m_i v_{ij}\right) \longleftrightarrow (P_{C.M.X}, P_{C.M.Y})$

力矩 $\left(\sum_i \tau_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) \longleftrightarrow \tau = \vec{r}_{C.M.} \times \vec{F}_{C.M.}$

動能 $\left(\sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) \longleftrightarrow K_{C.M.} = \frac{1}{2} M_{C.M.} V_{C.M.}{}^2$

質量中心

質量中心的力矩

$$\tau_{C.M.} = \vec{r}_{C.M.} \times \vec{F}_{C.M.}$$
$$= \vec{r}_{C.M.} \times M_{C.M.}\vec{g}$$
$$= (x_{C.M.}, y_{C.M.}) \times M_{C.M.}\vec{g}$$

$$x_{C.M.} \cdot M_{C.M.}\vec{g}$$
$$y_{C.M.} \cdot M_{C.M.}\vec{g}$$

☆

系統的力矩 $\tau_{系統} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \tau_i$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g}$$
$$= \sum_i (a_i, y_i) \times m_i \vec{g}$$

$$\sum_j x_j m_j \vec{g}$$
$$\sum_j y_j m_j \vec{g}$$

$$\tau_{系統} = \tau_{C.M.}$$

$$x_{C.M.} \cdot M_{C.M.}\vec{g} = \sum_i x_i m_i \vec{g}$$

$$y_{C.M.} \cdot M_{C.M.}\vec{g} = \sum_i y_i m_i \vec{g}$$

得出質量中心的位置 $(x_{C.M.}, y_{C.M.})$

$$x_{C.M.x} = \frac{\sum_i x_i m_i}{M_{C.M.}} = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i} ------(1a)$$

$$y_{C.M.} = \frac{\sum_i y_i m_i}{M_{C.M.}} = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i} ------(1b)$$

$$\frac{d}{dt}(1a和1b)$$

（位移一次時間微分）

$$x'_{C.M.x} = V_{C.M.X} = \frac{\sum_i x_i' m_i}{M_{C.M.}} = \frac{\sum_i V_{ix} m_i}{\sum_i m_i}$$

$$y'_{C.M.y} = V_{C.M.y} = \frac{\sum_i y_i' m_i}{M_{C.M.}} = \frac{\sum_i V_{iy} m_i}{\sum_i m_i}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(1a和1b)$$

（位移二次時間微分）

$$x''_{C.M.x} = a_{C.M.X} = \frac{\sum_i x_i'' m_i}{M_{C.M.}} = \frac{\sum_i a_{ix} m_i}{\sum_i m_i}$$

$$y''_{C.M.y} = a_{C.M.y} = \frac{\sum_i y_i'' m_i}{M_{C.M.}} = \frac{\sum_i a_{iy} m_i}{\sum_i m_i}$$

15. 若系統不受外力或獨立系統

→ 系統所受的合力為零

亦指質量中心所受合力＝0

$$\vec{F}_{C.M.} = 0 = M_{C.M.} \cdot \vec{a}_{C.M.}$$

→ $\vec{a}_{C.M.} = 0$ → $\vec{V}_{C.M.} =$ 常數 質量中心作等速度運動

→ $\vec{P}_{C.M.} = M_{C.M.} \vec{V}_{C.M.} =$ 常數

質量中心的總動量為常數

代表整個系統動量總和為常數

$$(\vec{P})_{系統} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}_{C.M.} = 常數$$

任一時刻之系統動量總和為常數

$$(\sum_i m_i V_i)_{t=t_i} = (\sum_f m_f V_f)_{t=t_f} = (\vec{P})_{系統} = \vec{P}_{C.M.} = 常數$$

"碰撞前動量總和=碰撞後動量總和"

$$(\vec{P}_{系統} = \sum_i m_i v_i)_{碰撞前} = (\vec{P}_{系統} = \sum_f m_f v_f)_{碰撞後}$$

動量守恆 (Momentum Conservation)

16. 碰撞 (Collision)

任何碰撞 → 第一先決公式 (動量守恆)

→ 先列出

$$\sum_i m_i V_i = \sum_f m_f V_f$$

碰撞

$$\sum_i m_i v_i = \sum_f m_f v_f$$

彈性碰撞

(ELASTIC COLLISION)

$$\sum_i k_i = \sum_f k_f$$

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{\,2} = \sum_f \frac{1}{2} m_f v_f^{\,2}$$

非彈性碰撞

(INELASTIC COLLISION)

$$\sum_i k_i > \sum_f k_f$$

動能損耗

$$i \geq f + 1$$

碰撞後至少二合一產生

完全非彈性碰撞

(COMPLETELY INELASTIC COLLISION)

若一系統有兩個物體進行完全非彈性碰撞

☆ ☆

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_i \vec{P}_i\right)_{前} = \left(\sum_f \vec{P}_f\right)_{後} = \vec{P}_{C.M.} = M_{C.M.}\vec{V}_{C.M.}$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{V}' = M_{C.M.}\vec{V}_{C.M.}$$

$$= (m_1+m_2)\vec{V}_{C.M.}$$

$$\boxed{\vec{V}' = \vec{V}_{C.M.}}$$

➔ 碰撞後的速度 = 質量中心的速度

例題 8.

甲球質量是乙球的5倍，甲球碰撞後速度變化量$6m/s$，向左，求乙球的速度變化量？若甲乙兩球碰撞後黏在一起為$8m/s$向左，求碰撞前的質量中心的速度？

請回家練習！