Chapter 2 運動學 KINEMATICS

1. 運動學的物理量及基本定義

純量物理量:

<1> 路徑長度(Path length or Distance)

--路徑長度是運動過程長度的累積。

$$S(t_0+t) > \Delta S(t_0)$$

<2> 速率(Speed)

--單位時間內所走過的路徑長度，

速率永遠是正的。

$$V(t_0)=\frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t}=\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}=\frac{>0}{>0}>0$$

向量物理量：

<1> 位移(Displacement)—運動軌跡前後時間點之直線距離向量。

$$\Delta D(t_0) = D(t_0+\Delta t) - D(t_0)$$

<2> 速度(Velocity) = 單位時間內的位移變化量。 $\bar{V}(t_0) = \dfrac{\Delta \vec{D}(t_0)}{\Delta t}$

平均(Average) 速度 → $\Delta t 大 \rightarrow \vec{V}(t_0) = \bar{V}(t_0) = \vec{V}_{AVE}(t_0) = \dfrac{\Delta \vec{D}(t_0)}{\Delta t}$

瞬間(Instantaneous) 速度 → $\Delta t \cong 0, \vec{V}_{INST} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{D}(t_0)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \bar{V}(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{AVE}(t_0)$

$= \dfrac{d\vec{D}(t_0)}{dt}\Big|_{t=t_0}$ = 位移的一階導數

<3>加速度(Acceleration)—單位時間內速度的變化量。

平均加速度→ $\Delta t \text{ 大} \rightarrow \vec{a}_{AVE}(t_0) = \vec{a}(t_0) = \frac{\Delta \vec{V}(t_0)}{\Delta t}$

瞬間加速度→ $\Delta t \cong 0 \rightarrow \vec{a}_{INST}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{AVE}(t_0) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}$

$$= \frac{d^2 \vec{D}(t)}{dt^2}\Big|_{t=t_0}$$

一般而言，平均速率不等於平均速度
除非，路徑長度的變化量=位移的變化量，換言之，
路徑長度的變化量為一直線。通常上述的情形發生在時間間隔很小的時候
路徑長度的變化量為一直線=位移長度的變化量為一直線(純量)
(瞬間速率=瞬間速度的純量)

$$\Delta S(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \Delta \vec{D}(t_0) \right|$$

2. 從位移-時間圖判別運動狀態

<1> 斜率m = $\dfrac{d\vec{D}(t)}{dt}$

m是正的。 $\dfrac{d\vec{D}(t)}{dt} = \dfrac{>0}{>0} > 0$

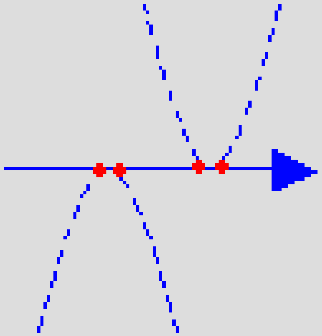
m是負的。 $\dfrac{d\vec{D}(t)}{dt} = \dfrac{<0}{>0} < 0$

瞬間速度 $\vec{V}_{INST} = \dfrac{d\vec{D}(t)}{dt}$ = 位移時間圖曲線之斜率 (*Slope*)

<2> 先找斜率為零的時間點→波峰或波谷點。

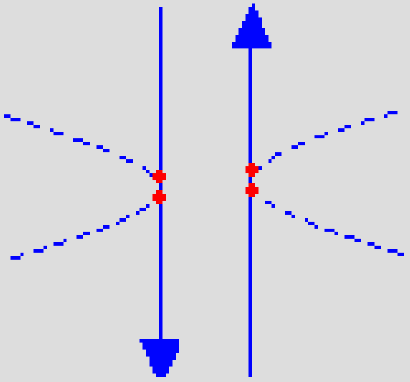
(斜率為零) → 水平線

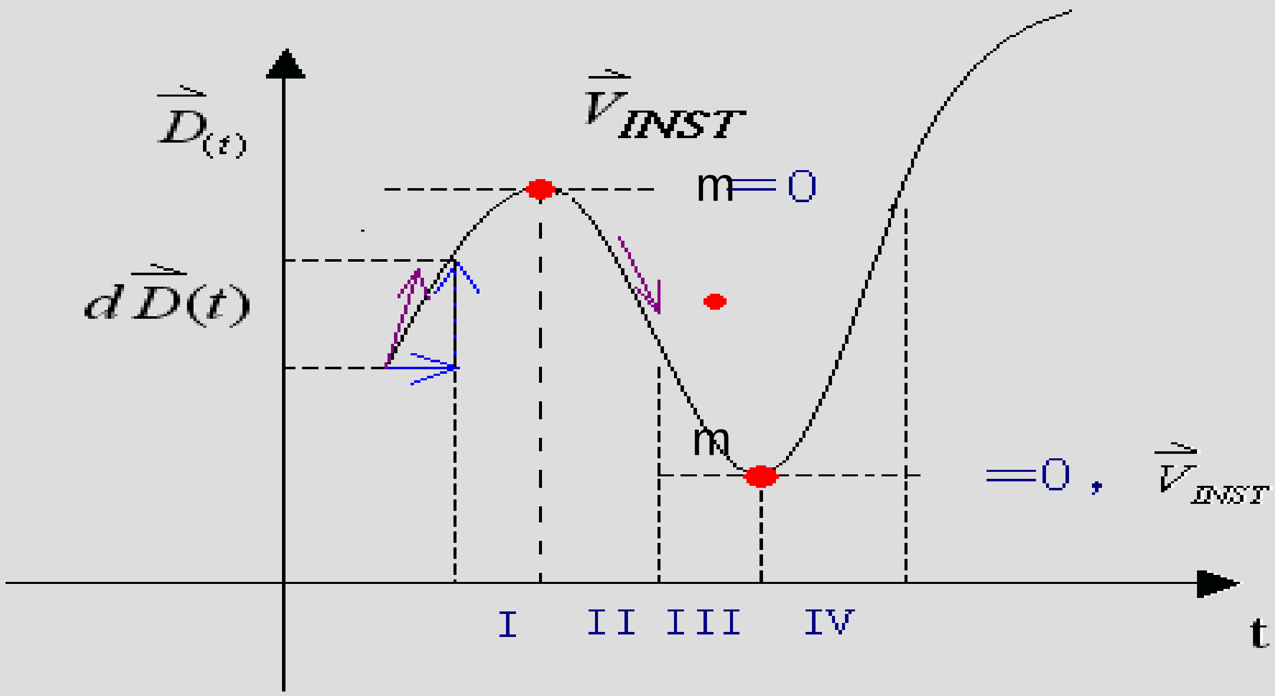
$$\Delta D(t) = 0\,,\, m = \frac{\Delta D(t)}{\Delta t} = 0$$



(斜率為無限大) → 垂直線

$$\Delta t = 0\ ,\ m = \frac{\Delta D(t)}{\Delta t} = 0$$





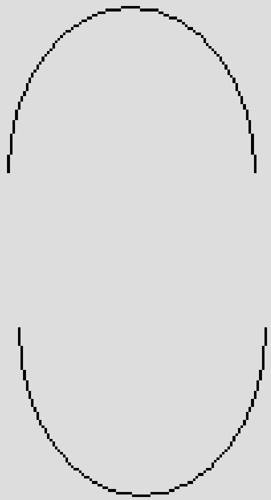
$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{\Delta t} = \frac{m - 0 < 0}{\Delta t} < 0$$

I, II - 減速　III, IV - 增速　(II , $V_{inst} = m < 0$)

☆ 加速度的判別是以加速度向量來辨別，而非純量來辨別。

(3) 斜率為瞬間速度 $(m = V_{inst}$ = 瞬間速度)

(4)



→ 拋物線: $y = ax^2+bx+c$， $a < 0$ 開口向下。

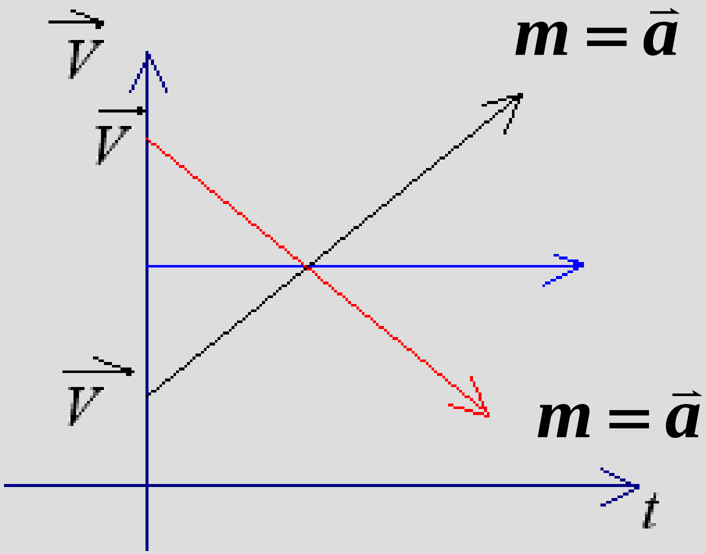
$D(t) = at^2+bt+c$， $a = 2a < 0$ 減速

$$a(t) = \frac{d^2\vec{D}(t)}{dt^2} = 2a$$

→ 拋物線: $y = ax^2+bx+c$， $a > 0$ 開口向上。

$a = 2a > 0$ 加速

3. 速度時間圖曲線上斜率為瞬間加速度。



$$\vec{a} = \text{直線斜率} = const = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$\vec{a} > 0$ → 等加速度運動

$\vec{a} < 0$ → 等減速度運動

} 等加速度運動

4. 運動學的所有運動分類（綜合整個學年的）

物體運動

(A)等速度運動 $(\vec{V} = const \rightarrow \vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = 0)$

→牛頓第一運動:靜者恆靜，動者恆動(慣性定律)

(B)非等速度運動 $(\vec{V} \neq const \rightarrow \vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \neq 0)$

(B)非等速度運動

<B-1> 等加速度運動 (a = const) →
運動方程式 (Kinematics Equation)

[以一度空間為例]:

1. $$\vec{V} = \vec{V}_{x_0} + \vec{a}_x t = \vec{V}_{x_0} + \vec{a}_x t$$

2. $$\vec{X} - \vec{X}_0 = \overline{V}_x t = \left(\frac{\vec{V}_x + \vec{V}_{x_0}}{2}\right)t$$

3. $$\vec{X} - \vec{X}_0 = \vec{V}_{x_0} t + \frac{1}{2}\vec{a}_x t^2$$

4. $$\vec{X} - \vec{X}_0 = \overline{V}_x t = \left(\frac{\vec{V}_x^{\,2} - \vec{V}_{x_0}^{\,2}}{2\vec{a}_x}\right)$$

☆應用實例: 自由落體 (Free Fall) (x→y) ($\vec{a}_x \rightarrow \vec{a}_y = -g$)

1. $\vec{V}_y = \vec{V}_{y_0} + \vec{a}_y t = \vec{V}_{y_0} - gt$	2. $\vec{y} - \vec{y}_0 = \bar{\vec{V}}_y t = \left(\frac{\vec{V}_y + \vec{V}_{y_0}}{2}\right)t$
3. $\vec{y} - \vec{y}_0 = \vec{V}_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2$	4. $\vec{y} - \vec{y}_0 = \bar{\vec{V}}_y t = \left(\frac{\vec{V}_y^{\,2} - \vec{V}_{y_0}^{\,2}}{-2g}\right)$

(B-2) 非等加速度運動 $\vec{a} \neq const$

→ 等速圓周運動 $|\vec{a}| = const$，$\angle|\vec{a}| \neq const$

→ 簡諧運動 $|\vec{a}| \neq const$，$\angle|\vec{a}| = const$

例題4.

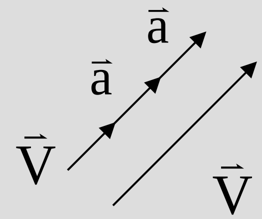
甲在原點左方3m處靜止，其加速度為$6m/s^2$向左，若末速度為28m/s向左，求末位移和所需的時間?

請回家練習!

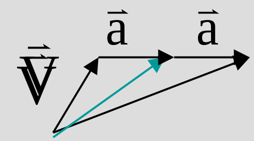
☆ 等加速運動

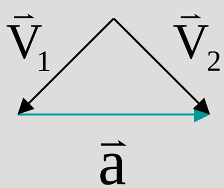
(1)直線運動→ $\vec{V}_0$ 和 $\vec{a}$ 同向或夾角為零

→ $\vec{V}=\vec{V}_0+\vec{a}t$，$\vec{V}$ 和 $\vec{V}_0$ 同向



(2)非直線運動 → $\vec{V}_0$ 和 $\vec{a}$ 有夾角





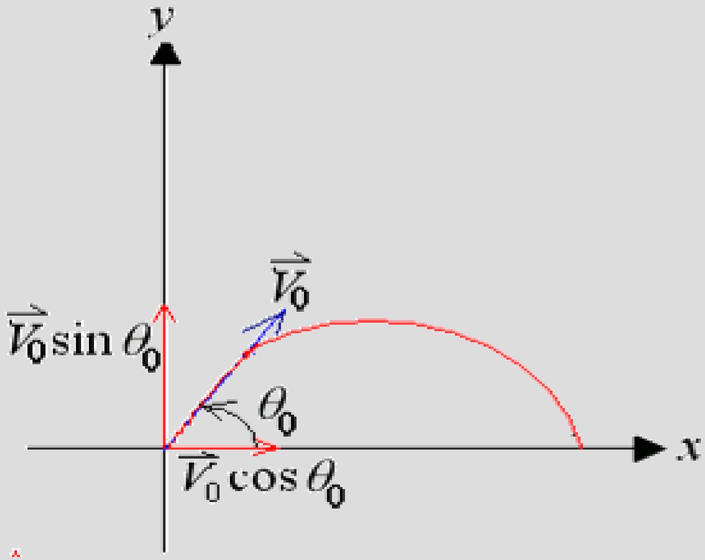
$$a=\frac{\vec{V}_2-\vec{V}_1}{\Delta t}$$

☆抛射運動 (Projectile Motion)

→ 等速度(X軸)

等加速度(Y軸) [自由落體]

$$\vec{V}_X = \vec{V}_{X_0} = \vec{V}_0 \cos\theta_0$$



<1> $\vec{V}_y = \vec{V}_{y_0} - gt = |\vec{V}_0| \sin\theta_0 - gt$

<2> $\vec{y} = \vec{V}_y t = (\frac{\vec{V}_y + \vec{V}_0 \sin\theta_0}{2})t$

<3> $\vec{y} = \vec{V}_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} gt^2$

<4> $\vec{y} = \frac{\vec{V}_y^{\,2} - (V_0 \sin\theta_0)^2}{-2g}$

☆只要初速 V_0 和仰角 θ_0 已知 →

即可掌握軌跡上各時間點的運動物理量。

☆拋射運動三大物理量

<1> 飛行時間 (Flight Time T_F)

$$T_F = T_{上升} + T_{下降} = 2T_{上升} = 2T_{下降} = \frac{2V_0 \sin\theta_0}{g}$$

☆最高點 $\rightarrow \vec{V}_y = 0$， $\vec{V}_y = V_0 \sin\theta_0 - g\,T_{上升} = 0$

$$\rightarrow T_{上升} = \frac{V_0 \sin\theta_0}{g}$$

<2> 拋射高度 (Height *H*)

$$Y = H = \frac{(\vec{V}_y + V_0 \sin\theta_0)}{2} \times T_{上升} = \frac{V_0 \sin\theta_0}{2} \times \frac{V_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{V_0^{\,2} \sin^2\theta_0}{2g}$$

$$= \frac{V_y^{\,2} - V_0 \sin^2\theta_0}{-2g} = \frac{V_0^{\,2} \sin^2\theta_0}{2g}$$

<3> 拋射範圍 (Range *R*)

$$X = R = V_0 \cos\theta_0 \times T_F = V_0 \cos\theta_0 \times \frac{2V_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{V_0^{\,2}\, 2\sin\theta_0 \cos\theta_0}{g}$$

$$= \frac{V_0^{\,2} \sin 2\theta_0}{g}$$

$$[\sin 2\theta_0 = 2\sin\theta_0 \cos\theta_0]$$

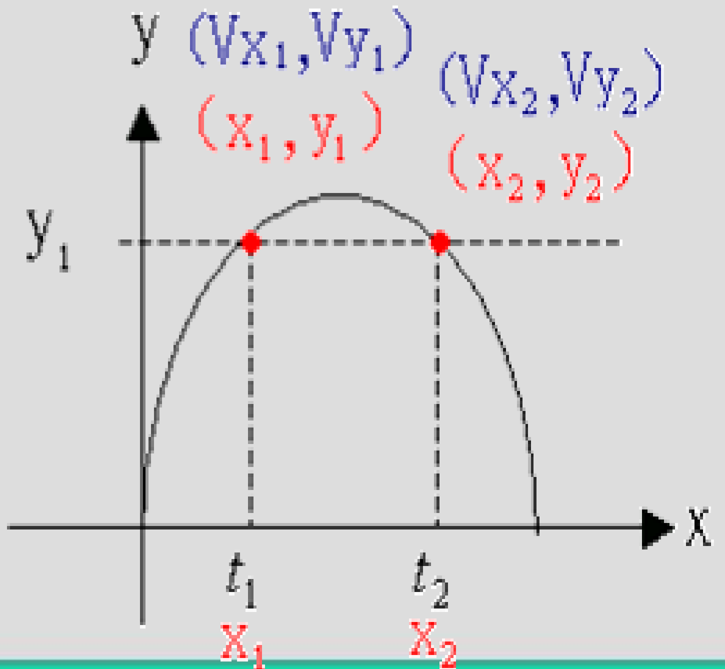
☆時(t)已知→空(x，y)，速(Vx，Vy) 轉換

$$(x_1, y_1) \Rightarrow (V_0\cos\theta_0 \times t_1,\ V_0\sin\theta_0 \times t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2)$$

$$(x_2, y_2) \Rightarrow (V_0\cos\theta_0 \times t_2,\ V_0\sin\theta_0 \times t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2)$$

$$(V_{x_1}, V_{y_1}) \Rightarrow (V_0\cos\theta_0\ ,\ V_0\sin\theta_0 - gt_1)$$

$$(V_{x_2}, V_{y_2}) \Rightarrow (V_0\cos\theta_0\ ,\ V_0\sin\theta_0 - gt_2)$$



☆空(x_1已知，y_1已知)→時

$$\left(t_{1,2} = \frac{x_{1,2}}{V_0\cos\theta_0}，(t_1, t_2) = \frac{V_0\sin\theta_0 \mp \sqrt{V_0^2\sin^2\theta_0 - 2gy_1}}{g}\right)$$

$$y_1 = V_0\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

同一高度y_1，有兩個時間點 (t_1, t_2)

$$-\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\theta_0 t - y_1 = 0$$

$$(t_1, t_2) = \frac{-V_0\sin\theta_0 \pm \sqrt{V_0^2\sin^2\theta_0 - 2gy_1}}{-g}$$

$$= \frac{V_0\sin\theta_0 \mp \sqrt{V_0^2\sin^2\theta_0 - 2gy_1}}{g},\ t_1 < t_2$$

☆☆☆ 拋射方程式(Projectile Equations)

$y_0 = 0$

$y = V_{y0}\, t - 1/2\, g\, t^2$

$$\rightarrow\ y = V_{y_0}\left(\frac{x}{V_{x_0}}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_{x_0}}\right)^2 \qquad \left(t = \frac{x}{V_{x_0}}\right)$$

$$= \frac{V_{y_0}}{V_{x_0}} x - \left(\frac{g}{2V_{x_0}^{\ 2}} x^2\right)$$

$$= \tan\theta_0\, x - \left(\frac{g}{2V_{x_0}^{\ 2}}\right) x^2$$

[原版]

$$\frac{g}{2V_{x_0}{}^2} \times \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_0} = \frac{g}{2V_0{}^2\cos^2\theta_0} \times \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_0}$$

$$= \frac{g}{2V_0{}^2\cos\theta_0\sin\theta_0} \times \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \quad [\, R = \frac{V_0{}^2\sin 2\theta_0}{g} \,]$$

$$= \frac{1}{R}\tan\theta_0$$

$$y = \tan\theta_0\, x - \frac{\tan\theta_0}{R} x^2$$

[R版] ☆

$$\frac{g}{2V_{x_0}^{\;2}} \times \frac{V_{y_0}^{\;2}}{V_{y_0}^{\;2}} = \frac{g}{2V_{y_0}^{\;2}} \times \frac{V_{y_0}^{\;2}}{V_{x_0}^{\;2}} \qquad [\,H = \frac{V_{y_0}^{\;2}}{2g}\,]$$

$$= \frac{1}{4H}\tan^2\theta_0$$

$$y = \tan\theta_0\, x - \frac{\tan^2\theta_0}{4H}x^2$$

[H版] ☆

例題 5：

力士飛彈彈道方程式 $y = 0.3\,x - 6\times10^{-6}\,x^2$

求 (θ_0, Vx, Vy)及(T_F, H, R)

求 30秒後飛彈的位置(x_1, y_1)及運動狀態(Vx, Vy, θ) [時→空]，

求下降至800m所需的時間 [空→時]?

請回家練習!

5. 相對運動之相對速度 (*Relative Velocity*)

$\vec{V}_{AB}$ = A相對於B的速度

$\vec{V}_{BC}$ = B相對於A的速度

$\vec{V}_{AC}$ = A相對於C的速度

$$\vec{V}_{AC} = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{BC}$$

☆相對速度就是”合成向量的圖解法的實例應用”

應用實例:

$$\vec{V}_{機地} = \vec{V}_{機風} + \vec{V}_{風地} \qquad \vec{V}_{P\_G} = \vec{V}_{P\_W} + \vec{V}_{W\_G}$$

$$\vec{V}_{舟岸} = \vec{V}_{舟河} + \vec{V}_{河岸} \qquad \vec{V}_{B\_S} = \vec{V}_{B\_R} + \vec{V}_{R\_S}$$

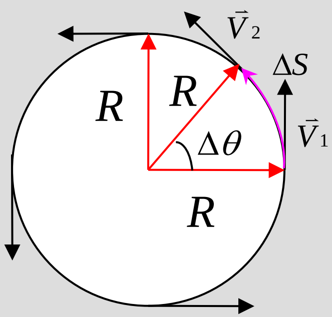
→

PLANE	機
WIND	風
GROUND	地
BOAT	舟
RIVER	河
SHORE	岸

☆ <B-2> 非等加速度運動 $(\vec{a} \neq const)$

$(|\vec{a}| = \text{const}, \angle \vec{a} \neq \text{const})$ → 等速率圓周運動

$(|\vec{a}| \neq \text{const}, \angle \vec{a} = \text{const})$ → 簡諧運動

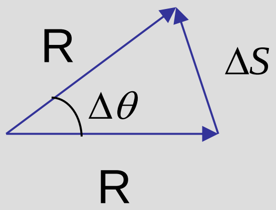


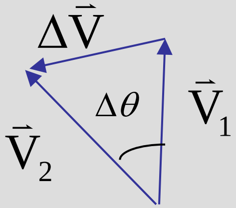
(等速率圓周運動
非等速度運動，因為每一點方向不同)

$$\Delta\theta = \frac{\Delta S}{R}$$

$R \cdot \triangle\theta = \triangle S$ （θ很小，$\triangle S$ 為一直線）

半徑×角度=弧長





$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \rightarrow V \times \Delta\theta = \left|\Delta\vec{V}\right| \qquad \Delta\theta = \frac{\left|\Delta\vec{V}\right|}{V}$$

$$\rightarrow \Delta\theta = \frac{\Delta S}{R} = \frac{\left|\Delta\vec{V}\right|}{V} \xrightarrow{\text{同乘於}\frac{1}{\Delta t}} \frac{\frac{\Delta S}{\Delta t}}{R} = \frac{\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}{V}$$

$$\frac{V}{R} = \frac{\left|\vec{a}_R\right|}{V} \rightarrow \left|\vec{a}_R\right| = \frac{V^2}{R} = \text{向心加速度}$$

→ $\vec{a}_R$ 向心加速度 (*Centripetal Acceleration*)

簡諧運動 (*Simple Harmonic Motion*) (*S.H.M*)

$(|\vec{a}| \neq \text{const}, \angle\vec{a} = \text{const})$ → 位移是正弦波函數。

$\omega\Delta t = \Delta\theta \rightarrow \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ → 角速度(*Angular Velocity*)

角速度=角頻率

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ →角頻率(*Angular Frequency*)

$$\vec{y}(t) = y_0 \sin(\omega t)$$
$$= A \cdot \sin(\omega t)$$
$$= A \cdot \sin\theta$$
$$= A \cdot \sin(2\pi f t)$$

A → 振幅(Amplitude)

T → 週期(Period)

f → 頻率(Frequency)

ω → 角頻率(Angular Frequency)

$$\omega \rightarrow 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

移動位移 → Δx (直線)

轉動位移 → $\Delta \theta$ (角度)

$$\vec{V}_y(t) = \frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \frac{d\vec{y}(t)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = A \cdot \cos\theta \cdot \omega$$

$$\vec{a}_y(t) = \frac{d\vec{V}_y(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{y}(t)}{dt^2} = \frac{d(A \cdot \omega \cdot \cos\theta)}{dt}$$

$$= A\omega \cdot \frac{d(\cos\theta)}{dt} = A\omega \cdot (-\sin\theta) \cdot \omega$$

$$= -A\omega^2 \times \sin\theta = -\omega^2 \times y(t)$$

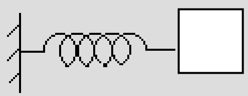
☆簡諧運動之特性方程式

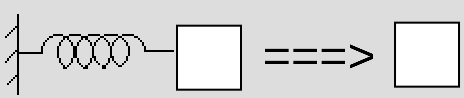
$$\vec{F}_y = m\vec{a}_y = -m\omega^2\vec{y}(t)$$

$$= -c\vec{y}(t)$$

$$= -k\vec{y}(t)$$ （彈簧力定律 = 虎克定律）

（力和位移方向相反，力和位移大小成正比）





$\vec{F}_x(-) = -k\,\Delta x\,(+)$ 回復力

← 回復力

應用實例: [彈簧系統的振動]

☆彈簧系統在y軸的上下振動可視為正弦波函數在y軸上的投影

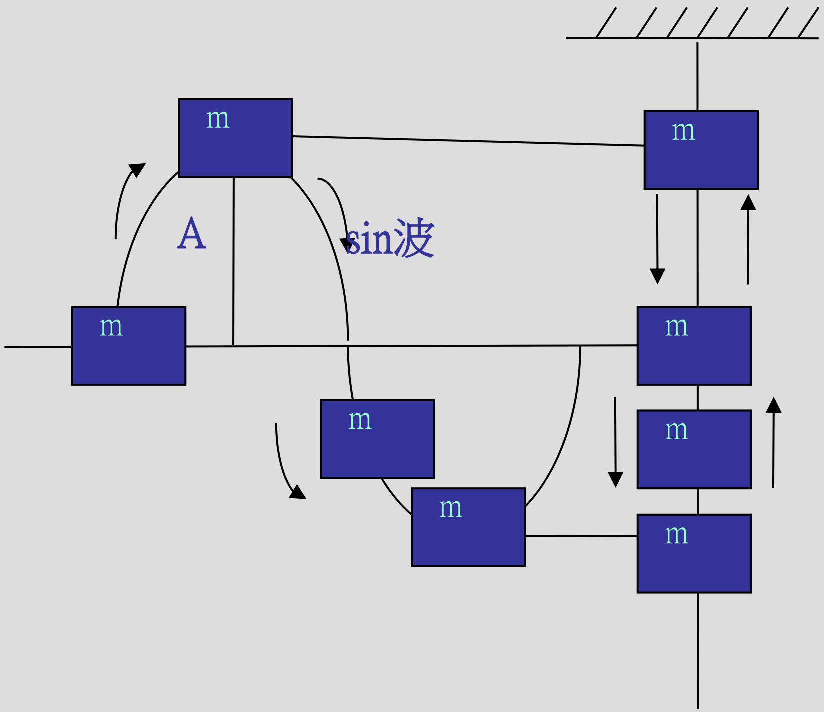
$$\vec{F}_y = -k \cdot y$$

$$\rightarrow \quad c = k = m\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



☆等速率圓周運動在y軸的投影亦為彈簧系統在y軸上下振動。

$$\vec{a}_R = \frac{V^2}{R} \text{（向心加速度）} = R \cdot \omega^2 \qquad (A=R)\ \text{振幅=半徑}$$

$$= A \cdot \omega^2$$

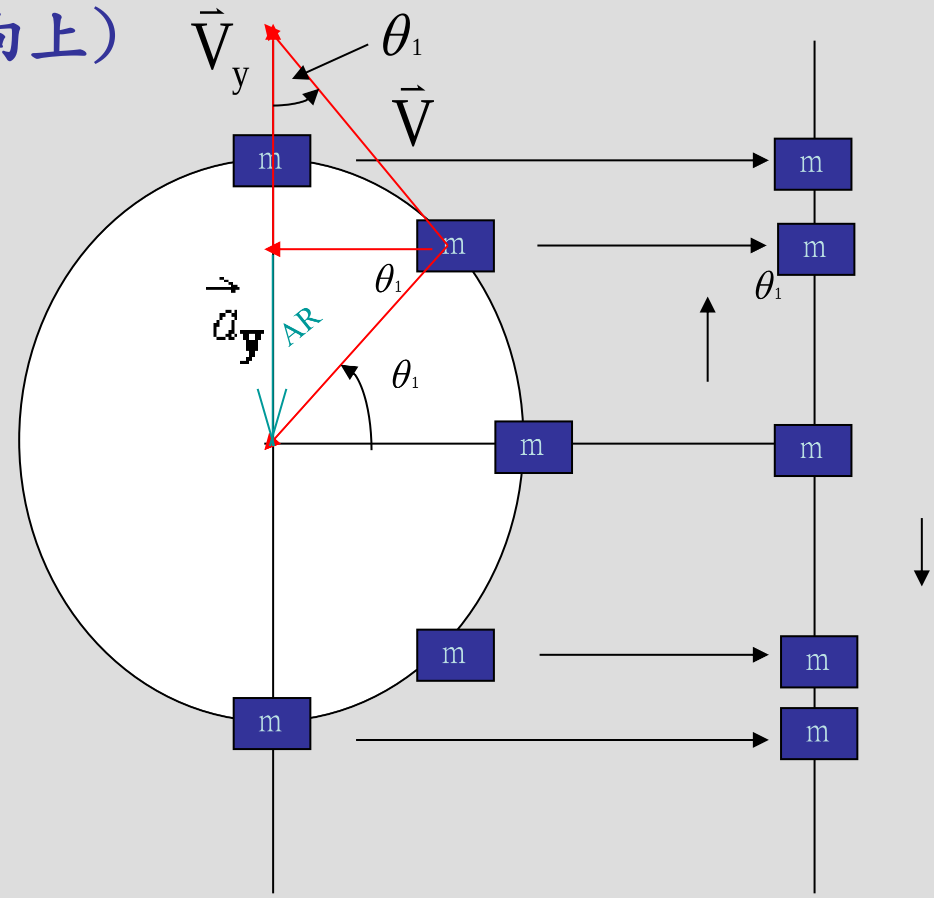
$$\vec{a}_y = -\vec{a}_R \cdot \sin\theta \quad (\vec{a}_y \text{是} \vec{a}_R \text{在y軸上的投影})$$

$$= A\omega^2 \sin\theta = \omega^2 y(t)$$

$$\vec{V}_y = \vec{V} \cdot \cos\theta = R\omega\cos\theta = A\omega\cos\theta$$

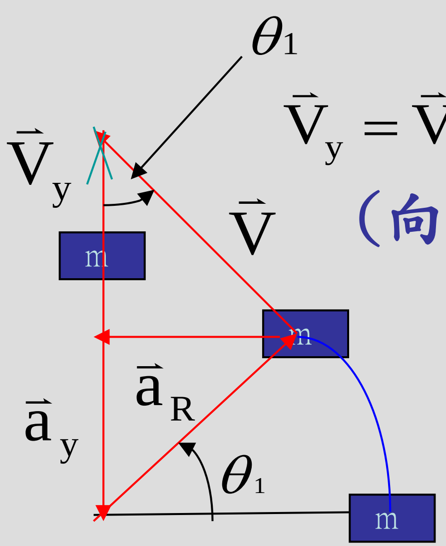
$$V = \frac{2\pi R}{T} = \omega \cdot R$$

（向上）



$$\vec{a}_y = -\vec{a}_R \cdot \sin\theta_1$$

（向下）



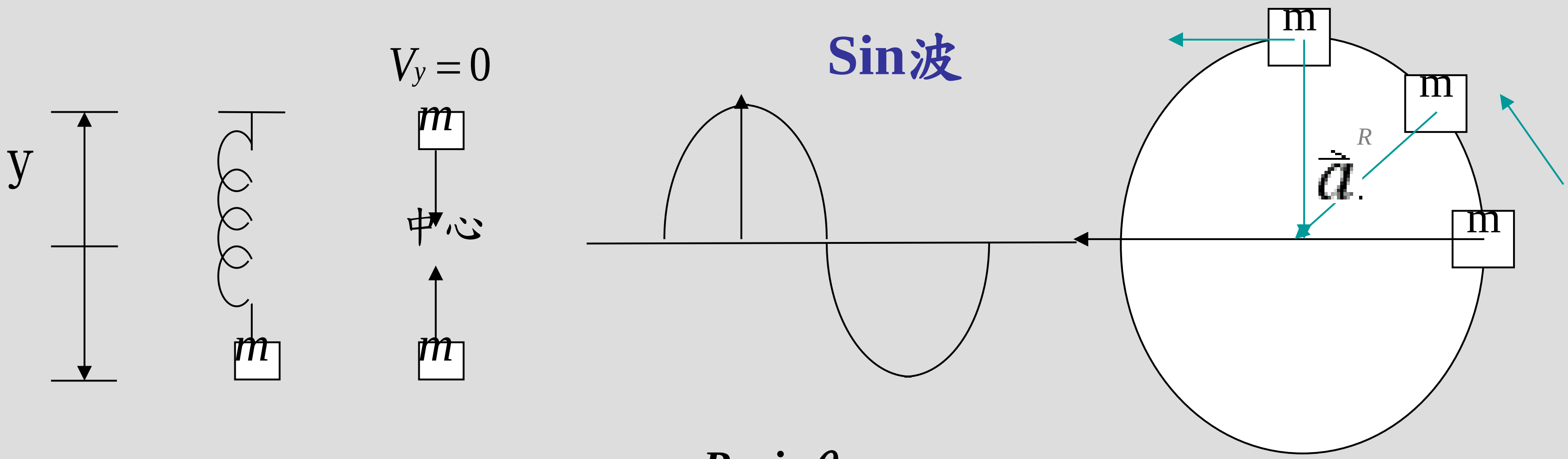
$$\vec{V}_y = \vec{V} \cdot \cos\theta_1$$

（向上）

$$\vec{a}_y = -\vec{a}_R \cdot \sin\theta$$

$$V_y = R \cdot \omega \cdot \cos\theta$$

$$V_y = V \cdot \cos\theta \quad \text{向上} \qquad = -\frac{V^2}{R} = -R\omega^2 \quad \text{向下}$$



$$y = R \cdot \sin\theta$$

$$= A \cdot \sin\theta$$

	$\overline{y}$	$\overline{V_{\mathbf{y}}}$	$\overline{a_{\mathbf{y}}}$	U(位能）	K(動能)	E(機械能）
最高點	A=R	0	$-A\omega^2(\theta=90^o)$	$\frac{1}{2}kA^2$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
中心點	0	$\pm A\omega$	0	0	$\frac{1}{2}kA^2$	$\frac{1}{2}kA^2$
最低點	−A=−R	0	$A\omega^2$	$\frac{1}{2}kA^2$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

任一時間t_1，求$(\theta,\vec{V}_y,\vec{F}_y,\vec{y},\vec{a}_y\ldots)$	任一位移y_1，求$(\theta,\vec{V}_y,\vec{F}_y,\vec{a}_y\ldots)$
$\theta_1=\omega\cdot t_1$ $\omega=\frac{2\pi}{T}$ 再代入 $\theta_1\rightarrow\ \vec{y}=A\cdot\sin\theta_1$ $\vec{V}_y=A\cdot\omega\cdot\cos\theta_1$ $\vec{a}_y=-A\omega^2\sin\theta_1$	$\theta_1=\sin^{-1}\frac{y_1}{A}$ 再代入 $\theta_1\rightarrow\ \vec{V}_y=A\cdot\omega\cdot\cos\theta_1$ $\vec{a}_y=-A\omega^2\cdot\sin\theta_1$