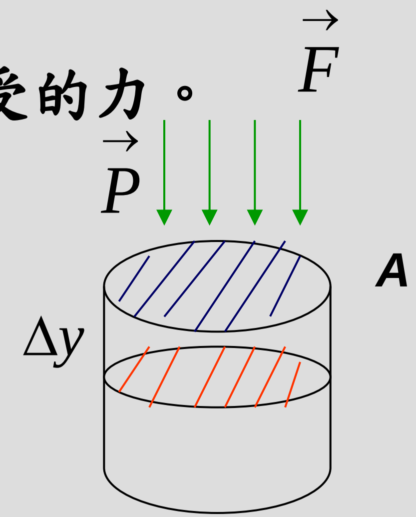
Chapter 5. 流體動力學 Fluid Dynamics

1. 流體力學 → 液體/氣體 流動的動力學。

2. 壓力(Pressure) $\Longrightarrow$ 單位面積上所承受的力。



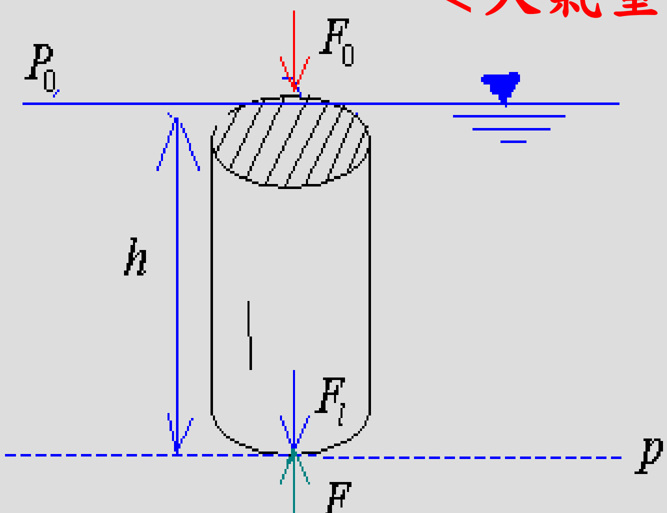
$$\vec{P} = \frac{\vec{F}}{A}$$ （向量觀點）

$$= \frac{\vec{F}\cdot\vec{\Delta y}}{A\cdot\Delta y} = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\text{流體移動所做的功}}{\text{流體面移動的體積}} = \frac{\text{能量}}{\text{體積}}$$

$=$ 能量密度（純量觀點）

3、壓力與液面下深度的關係式:

＜大氣重＞



液面下 h 深度，水平面保持平衡。

$$\sum_i F_i = 0 = F(\uparrow) + F_l(\downarrow) + F_0(\downarrow)$$

$$= P(\uparrow)A + mg(\downarrow) + P(\downarrow)A$$

$$= P(\uparrow)A + (-)mg + (-)P\ A$$

ρ_l ：液體密度

$$\Rightarrow P(\uparrow)A = P_o A + mg = P_o A + \rho_1 V_l g$$

$$= P_o A + \rho_1 A h g$$

（壓力與截面積無關，和深度有關）

$$P(\uparrow) = P_o + \rho_l h g$$

4. 巴斯卡 (Pascal) 原理

⇒ 藉由密閉容器內同液體之間壓力無損耗傳遞壓力可完整傳送至管壁各處及不同大小管面以獲得不同大小管面上力的放大與縮小。

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = P_2$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} = M > 1 \quad [F_2 = MF_1，力放大(Magnify)]$$

$$= S < 1 \quad [F_2 = SF_1，力縮小(Scale)]$$

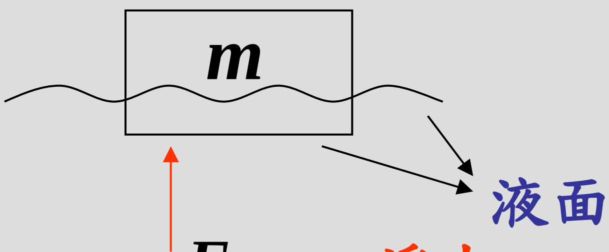
5. 浮力 (Buoyant Force)原理

→ 阿基米得 (Archimede's)原理

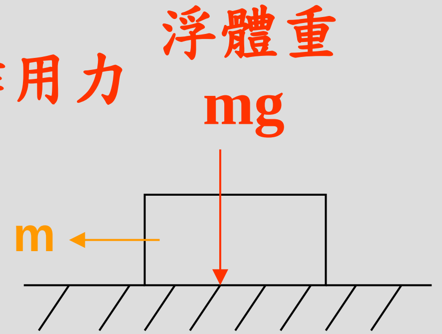
浮力(F_B) = 排開液面下同體積的液體重 $= \rho_l V_l g$

$= $ 浮體重 $= \rho_S V_S g$

= 浮體壓在液面上之重力反作用力



F_B = 浮力
= 浮體的重



N = mg 固體表面

浮體在液體裡受到浮力就猶如浮體在固體表面上所受的正向力，

因為正向力就是浮體壓在固體表面(桌面)上重力之反作用力。

$$\text{浮力} = \rho_s V_s g = \rho_l V_l g$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_s}{\rho_l} = \frac{V_l}{V_s} < 1$$

$$\text{液}_{\text{密}} > \text{固}_{\text{密}}$$

6、自努力（Bernoulli's）方程式

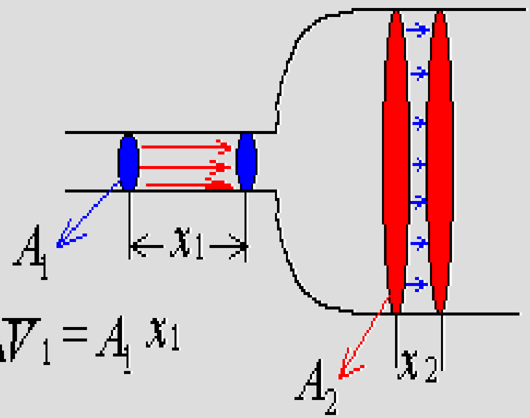
流體能量動力方程式

流入流體體積=流出流體體積[單位時間內]

$$\Delta V_{in} = \Delta V_{out}$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t}$$



$$\Delta V_1 = A_1 x_1$$

$$\Delta V_2 = A_2 x_2$$

$$A_1 \cdot \frac{\Delta \vec{x}_1}{\Delta t} = A_2 \cdot \frac{\Delta \vec{x}_2}{\Delta t}$$

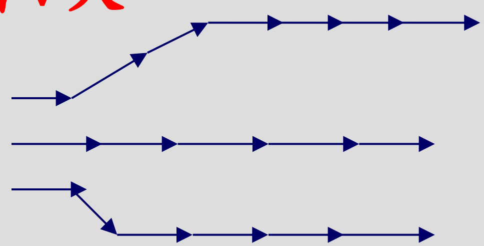
[流速與管徑截面積成反比]

$$A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2$$

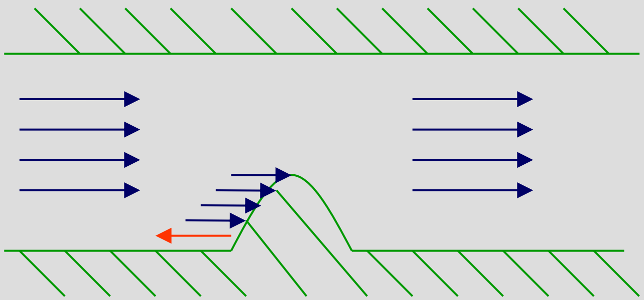
[流體連續方程式] CONTINUITY EQUATION

※ 非密閉空間，流體流速大小決定於流力線的密疏

密V大



疏V小



E(電場)大小決定於電力線的密疏

B(磁場)大小決定於磁力線的密疏

推導白努力方程式

→ 流入總能量＝流出總能量

總能量＝功＋機械能　$E = W + (U + K)$

$$\rightarrow \quad E_{IN} = W_{IN} + U_{IN} + K_{IN} = W_{OUT} + U_{OUT} + K_{OUT} = E_{OUT}$$

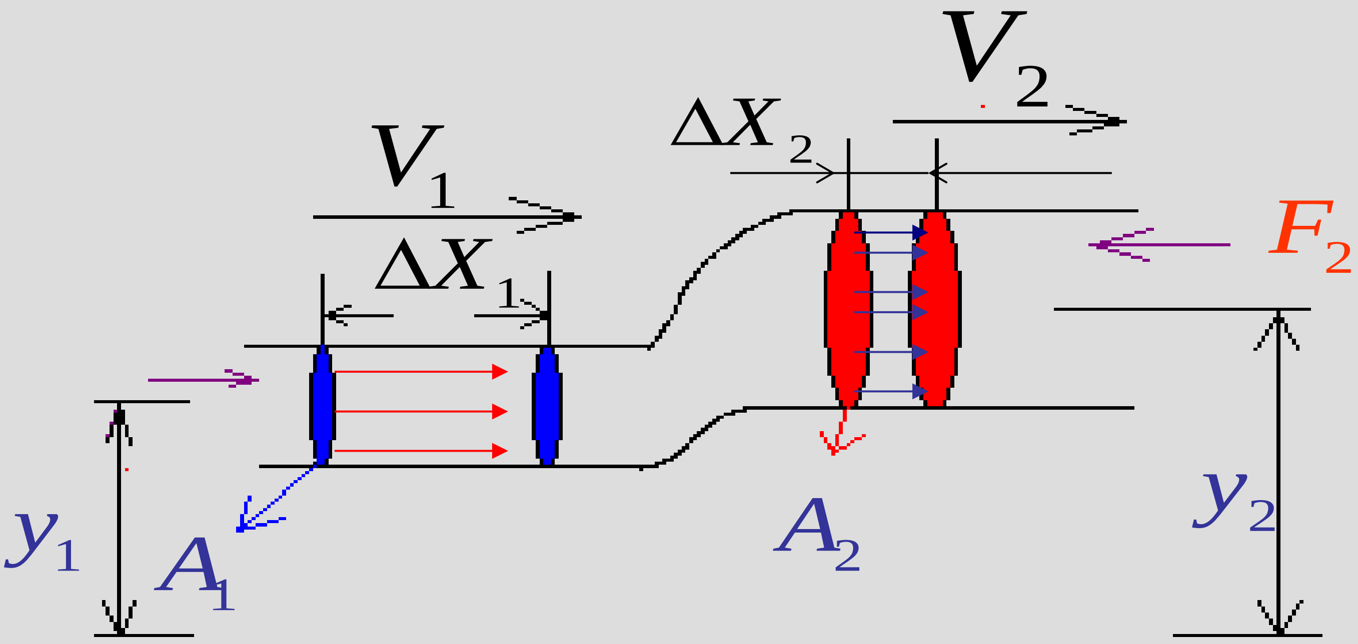
$$\rightarrow \quad W_1 + U_1 + K_1 = W_2 + U_2 + K_2$$

$$\rightarrow \quad F_1 \cdot \Delta X_1 + \Delta mgy_1 + \frac{1}{2}\Delta mv_1^2 = F_2 \cdot \Delta X_2 + \Delta mgy_2 + \frac{1}{2}\Delta mv_2^2$$

$$\rightarrow \quad F_1 \cdot \frac{\Delta X_1}{\Delta V} + \frac{\Delta m}{\Delta V} gy_1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V} V_1^2 = F_2 \cdot \frac{\Delta X_2}{\Delta V} + \frac{\Delta m}{\Delta V} gy_2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V} V_2^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{F_2}{A_2} + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\rightarrow \quad P_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$



V_2
ΔX_2
V_1
ΔX_1
F_2
y_1
A_1
A_2
y_2

※白努力原理 (相同高度 $y_1 = y_2$)

$\longrightarrow$ $y_1 = y_2$

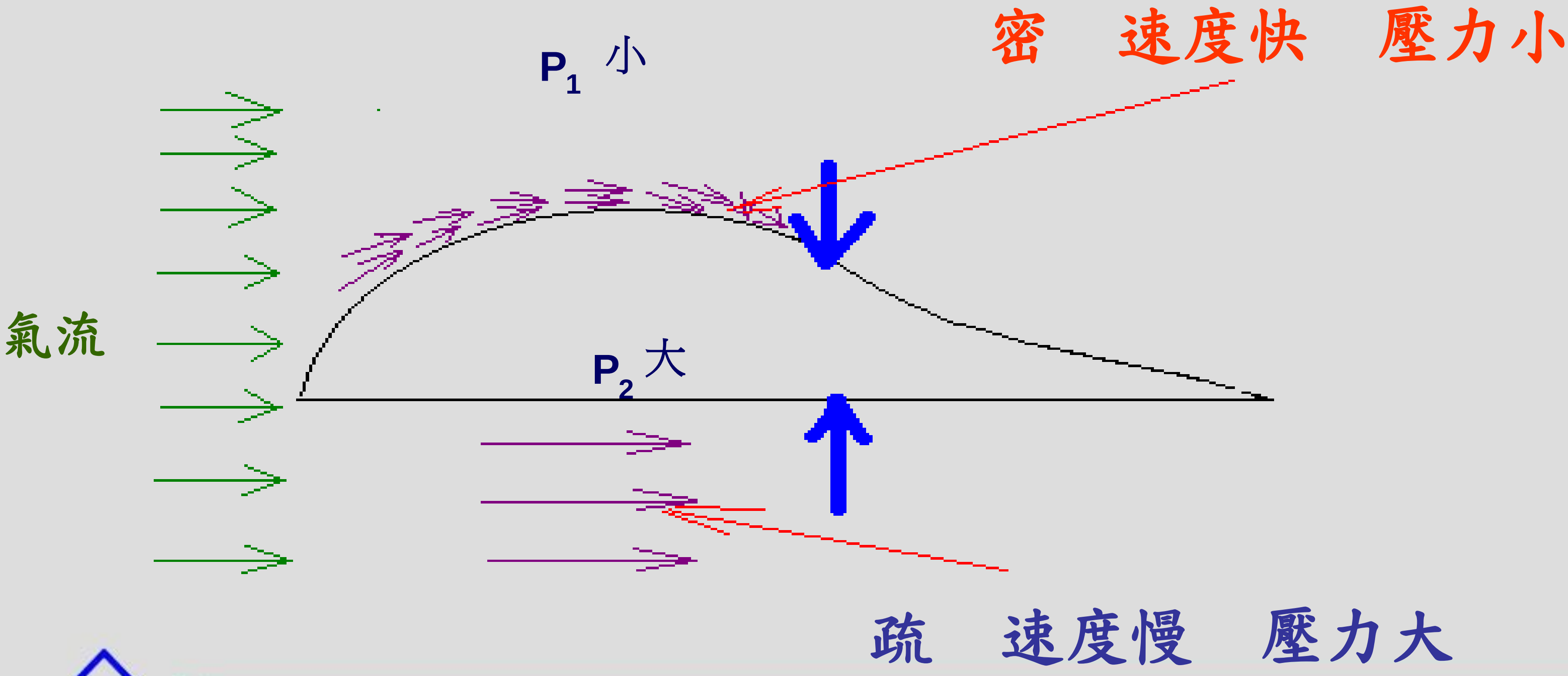
$$\Rightarrow \quad P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

壓力和流速　　成反比

大　　小

小　　大

白努力原理的應用：飛機機翼



變化球之流力線

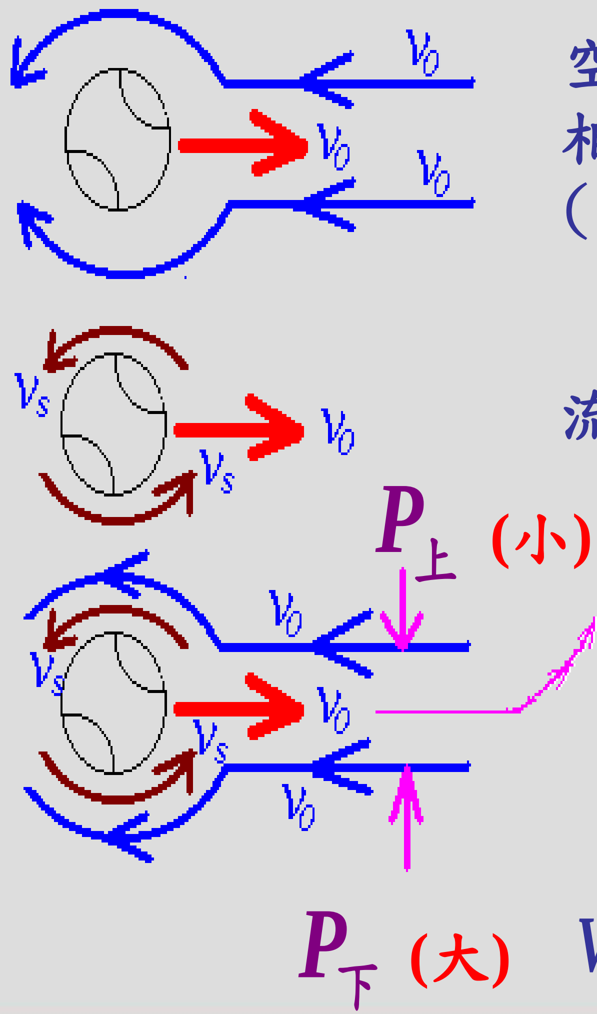
（一）直球

空氣之流力線流速和球速是相對速度
（方向相反，大小相同）

（二）旋轉球

流力線隨著轉動方向順曳

（三）上飄球



$V_{上} = V_0 + V_S$

$V_{上} > V_{下}$

$P_{上} < P_{下}$

白努力原理

$V_{下} = V_0 - V_S$

7、氣體動力論 (Kinetic Theory of Gas)

⟹ 絕對溫度 (Absolute Temperature)

⟹ 符合物理的基本定義的溫度指標

☆ 絕對溫度有物理上真正零點 (Zero)

☆ 真正零點 ⟶ 所有物質的原子或分子，
沒有移動，震動和轉動，

換言之，原子或分子動能為零

$K \longrightarrow$ Kelvin $\quad T_{(K)} = T_{(℃)} + 273.15$

$$\cong T_{(℃)} + 273$$

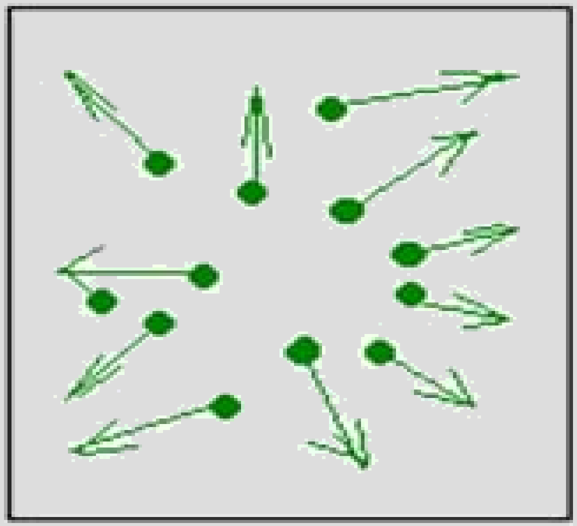
室溫 25℃ $\rightarrow T_{(K)} = 25 + 273 = 298\ K$

℃ ⟶ 攝氏溫度（Celsius Scale）

°F ⟶ 華氏溫度 (Fahrenheit Scale)

$$T_{(°F)} = 32 + T_{(℃)} \times \frac{9}{5}$$

氣體的溫度是來自氣體分子的動能



→ $T_{(K)} \propto K_B = \frac{1}{2} mV^2$

→ 某溫度 T → 氣體分子有動能

→ 有速度(V) → 在內壁產生碰撞

→ 有速度的變化量(△V) → 有加速度（ $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$ ）

→ 在內壁產生力（ $\vec{F} = m\vec{a}$ ）→ 單位面積內壁產生壓力

（ $\vec{P} = \frac{\vec{F}}{A}$ ）

氣體壓力和碰撞次數成正比

碰撞次數 $\propto$（1）氣體分子數（N）

$\propto$（2）氣體分子速度（V）　$K=\frac{1}{2}mV^{2}\propto T$

（3）$\frac{1}{\overline{V}}$　（$\overline{V}$：容器體積）

$\longrightarrow$ P（壓力）$\propto$ 碰撞次數 $\propto \left\{ \begin{array}{l} N \\ T \\ \frac{1}{\overline{V}} \end{array} \right.$

$$P = K_B \frac{NT}{\overline{V}} \left[K_B : \text{波茲曼常數}\left(Boltzmann\ Constant \right) \right]$$

$$= 1.38 \times 10^{-23}\ J/K$$

$$P\overline{V} = NK_BT \longrightarrow \text{P的單位為Pa}$$

$$P\overline{V} = nRT \quad \begin{cases} R = 0.082\text{，P的單位為atm} \\ R = 8.31\text{，P的單位為Pa} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad P\overline{V} = NK_BT$$ 〔氣體動力方程式，N個氣體分子數版〕

$$P\overline{V} = \frac{N}{N_A} NK_BT = nRT$$ 〔n莫耳氣體分子版〕

(*R*：氣體常數（Gas Constant），N_A：亞佛加厥常數）

$= N_A K_B$

$= 8.31 \; J/K \; mole$

$= 6.02 \times 10^{23}$ /mole

＜能量密度＝ $P = \dfrac{E}{\overline{V}} \rightarrow E = P\overline{V}$ ＞

☆☆☆ 氣體動力方程式的物理意義：

→ 描述在密閉容器內所有氣體分子的總能量

理想氣體（**Ideal Gas**）$\longrightarrow$ 氣體分子間無作用力（$F=-\dfrac{dU}{dx}$）

氣體分子間無位能（$U=-\int F\cdot dx$）

一個氣體分子的總能量 $\xrightarrow{U=0}$ 僅指於氣體分子的動能

（ $E=U+K=K$ ）

$$P\overline{V}=E\cong K=\frac{1}{2}mV^2$$

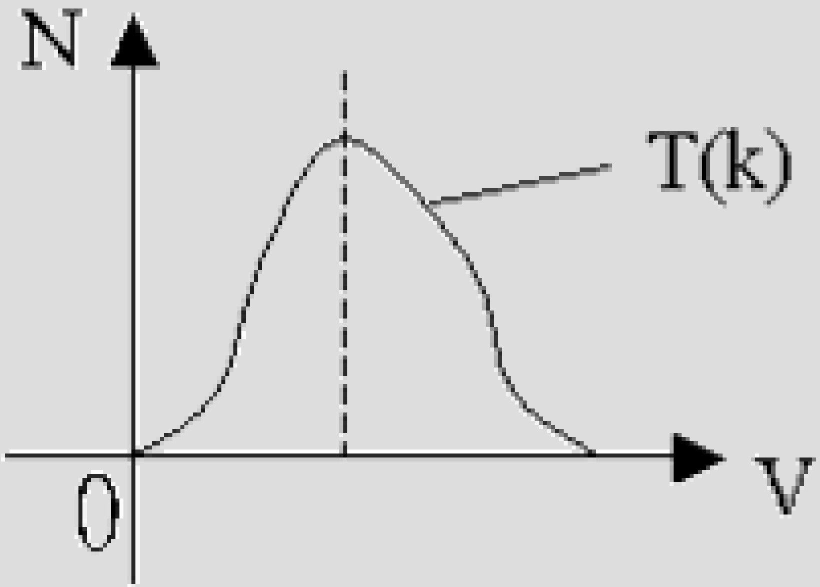
$$=K_BT$$

$m_{o_2}=\dfrac{32}{N_A}$ ，一個氧分子的質量

$m_{N_2}=\dfrac{28}{N_A}$ ，一個氮分子的質量

☆ 處理多個氣體分子的物理量 → 分佈曲線

→ 以平均觀點來處理氣體分子的物理量



氣體分子的平均動能

$$\overline{P\overline{V}} = \overline{E} = \overline{K} = \frac{1}{2}m\overline{V^2}$$

$$= K_B\overline{T} = \frac{1}{2}K_BT$$ 〔一度空間的平均動能〕$(\overline{T} = \frac{0+T}{2} = \frac{T}{2})$

$$= \frac{2}{2}K_BT$$ 〔二度空間的平均動能〕

$$= \frac{3}{2}K_BT$$ 〔三度空間的平均動能〕

☆ 三度空間的氣體分子的平均動能 $K = \frac{3}{2} K_B T$

☆ 氣體分子的方均根速度 $V_{r.m.s}$ → $V_{r.m.s}^2 = \overline{V^2}$

root (根) mean (均) square (方)

$V_{r.m.s} = \sqrt{\overline{V^2}}$

→ $$\overline{K} = \frac{1}{2} m\overline{V^2} = \frac{1}{2} m V_{r.m.s}^2 = \frac{3}{2} K_B T$$

→ $$\boxed{V_{r.m.s} = \sqrt{\frac{3K_B T}{m}}}$$

☆ 在某絕對溫度、密閉空間內多個氣體分子的各個能量或溫度，並不意謂都是此絕對溫度。

→ 密閉空間內所量測的溫度祇是空間內所有氣體分子的平均能量所顯現的溫度，並不能代表每個分子的溫度。

例11、某密閉容器內氮分子的方均根速度500m/s，求容器內的溫度？若容器內有9×10^{16}個氮分子，容器體積為150立方公分，求容器內壓力？

請回家練習