

第8章 能量守恒 本章習題

1. (I) 質量為 $m_1 = 5 \text{ kg}$ 及 $m_2 = 2 \text{ kg}$ 的兩物塊懸於無摩擦圓柱體兩側，如圖 8.16。如果此系統由靜止開始，則 m_1 落下 40 cm 時的速率為何？

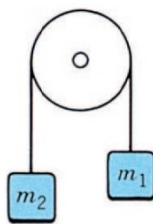


圖 8.16

答：

$$\begin{aligned} (1/2)(m_1 + m_2)v^2 - m_1gh + m_2gh &= 0 \\ \rightarrow (1/2)(5 + 2)v^2 - 5 \times 9.8 \times 0.4 + 2 \times 9.8 \times 0.4 &= 0 \\ \rightarrow v &= 1.83 \text{ m/s} \end{aligned}$$

2. (I) 質量為 $m_1 = 4 \text{ kg}$ 及 $m_2 = 5 \text{ kg}$ 的兩物塊以一輕繩連接，並在無摩擦的楔形物上滑行，如圖 8.17 所示。若已知由靜止開始，則 m_2 沿斜面滑行 40 cm 後之速率為何？

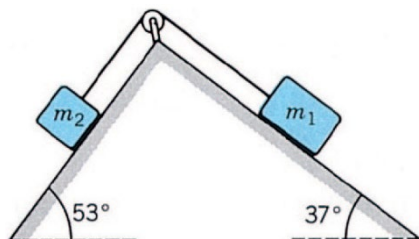


圖 8.17

答：

$$\begin{aligned} (1/2)(m_1 + m_2)v^2 - m_2gdsin53^\circ + m_1gdsin37^\circ &= 0 \\ \rightarrow (1/2)(4 + 5)v^2 - 5 \times 9.8 \times 0.4 \times sin53^\circ + 4 \times 9.8 \times 0.4 \times sin37^\circ &= 0 \\ \rightarrow v &= 1.18 \text{ m/s} \end{aligned}$$

3. (I) 一單擺長 75 cm，擺錘質量 0.6 kg。擺線與鉛垂線的夾角為 30° 時，擺錘速率為 2 m/s。(a) 擺錘的最大速率為何？(b) 與鉛垂線的最大夾角為何？

答：

$$\begin{aligned} E &= (1/2)mv^2 + mgL(1 - \cos\theta) \\ &= (1/2)(0.6)(2)^2 + (0.6)(9.8)(0.75)(1 - \cos30^\circ) = 1.79 \text{ J} \\ \text{(a)} \quad (1/2)mv^2 &= 1.79 \text{ J} \rightarrow v = 2.44 \text{ m/s} \\ \text{(b)} \quad mgL(1 - \cos\theta_0) &= 1.79 \text{ J} \rightarrow \theta_0 = 53.6^\circ \end{aligned}$$

4. (I) 單擺長度 1.2 m 且擺錘質量 0.8 kg。它從和垂直線成 90° 釋放。當(a) 繩子垂直時及(b) 繩子和垂直線成 37° 時，繩子的張力和擺錘速率為何？

答：

$$(a) v = (2gL)^{1/2} = (2 \times 9.8 \times 1.2)^{1/2} = 4.85 \text{ m/s}$$

$$T = mg + mv^2/L = 0.8 \times 9.8 + 0.8 \times 4.85^2/1.2 = 23.5 \text{ N}$$

$$(b) v = (2gL \cos 37^\circ)^{1/2} = (2 \times 9.8 \times 0.96)^{1/2} = 4.33 \text{ m/s}$$

$$T = mg \cos 37^\circ + mv^2/L = 0.8 \times 9.8 \cos 37^\circ + 0.8 \times 4.33^2/1.2 = 18.8 \text{ N}$$

5. (I) 質量 $m = 0.25 \text{ kg}$ 的物塊可在無摩擦的水平面滑動。它與彈力常數 $k = 10 \text{ N/m}$ 的彈簧相連。物塊被推移 40 cm 後放開。(a) 最大速率為何？(b) 伸長量為 20 cm 時的速率為何？(c) 在何處動能和位能相等？

答：

$$(a) \frac{1}{2}kA^2 = 0.8 \text{ J} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \rightarrow v_{\max} = 2.53 \text{ m/s}$$

$$(b) \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 0.8 \rightarrow v = 2.19 \text{ m/s}$$

$$(c) U = E/2 \rightarrow (1/2)kx^2 = (1/2)(1/2)kA^2 \rightarrow x = 28.3 \text{ cm}$$

6. (II) 質量為 $m_1 = 5 \text{ kg}$ 及 $m_2 = 3 \text{ kg}$ 的兩物塊，以輕的細線跨過無摩擦木栓而相連，如圖 8.18。較輕的物塊與一彈簧($k = 32 \text{ N/m}$)相連。若系統在彈簧未伸長時由靜止開始，求：(a) 較重物塊的最大位移；(b) 較重物塊落下 1 m 後的速率。

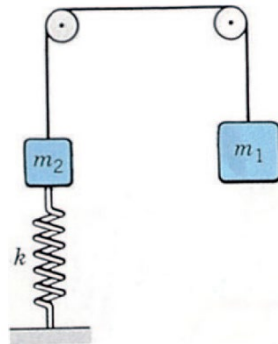


圖 8.18

答：

$$(a) (1/2)kD^2 - m_1gD + m_2gD = 0 \rightarrow D = 1.23 \text{ m}$$

$$(b) (1/2)(m_1 + m_2)v^2 + (m_2 - m_1)gd + (1/2)kd^2 = 0$$

$$\rightarrow (1/2)(8)v^2 + (-2)(9.8) + (1/2)(32) = 0 \rightarrow v = 0.95 \text{ m/s}$$

7. (II) 質量為 $m_1 = 2 \text{ kg}$ ， $m_2 = 3 \text{ kg}$ 的兩物塊懸於滑輪兩側，如圖 8.19 所示。物塊 m_1 置於斜面上($\theta = 30^\circ$)，並與彈力常數為 40 N/m 的彈簧相連。此系統在彈簧為自然長度時由靜止釋放。求：(a) 彈簧的最大伸長量；(b) 伸長量為 0.5 m 時 m_2 的速率(忽略摩擦與滑輪)。

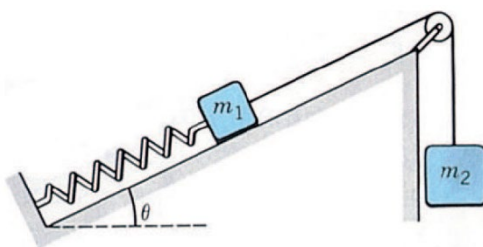


圖 8.19

答：

要利用 $E_f = E_i$ 的關係，就須設定物塊最初的高度為任意值 h_1 及 h_2 。對應的位能 m_1gh_1 及 m_2gh_2 ，在 E_i 及 E_f 中都會出現，因而互相抵消。為了省掉這道手續，就改用 $\Delta K + \Delta U = 0$ ，因為這個式子不需 $U = 0$ 的參考高度。

(a) 伸長量為最大值 D 時，木塊靜止，所以 $\Delta K = 0$ 。接著要求 U_g 和 U_{sp} 的變化。

當 m_2 落下的距離為 D 時，彈簧伸長 D ， m_1 則上升 $D \sin \theta$ 。因此

$$\begin{aligned}\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_{sp} &= 0 \\ 0 + (-m_2gD + m_1gD \sin \theta) + \frac{1}{2}kD^2 &= 0\end{aligned}$$

(要留意正負號)。故得

$$D = \frac{2g}{k}(m_2 - m_1 \sin \theta) = 0.98 \text{ m}$$

(b) 在此處動能的變化量為 $\Delta K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$ 。位能的變化量則與(a)形式相同，

但其中的 D 要以 $d = 0.5 \text{ m}$ 取代：

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + (-m_2gd + m_1gd \sin \theta) + \frac{1}{2}kd^2 = 0$$

代入已知的數值即可得 $v = 1.39 \text{ m/s}$ 。

8. (I) 一雲霄飛車的車身連同乘客質量達 600 kg 。它在 A 點的速率為 12 m/s 、高 30 m (見圖 8.20)。求它在以下各點的速率：(a) B 點；(b) C 點。忽略摩擦的損失。

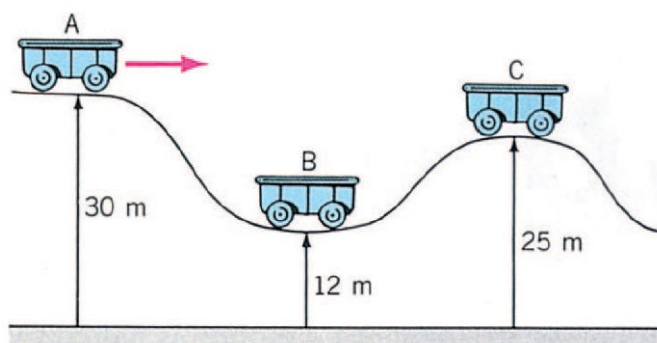


圖 8.20

答：

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgy_A = 2.19 \times 10^5 \text{ J}$$

$$(a) E_B = \frac{1}{2}(600)v_B^2 + (600g)(12) = 2.19 \times 10^5 \text{ J} \rightarrow v_B = 22.3 \text{ m/s}$$

$$(b) E_C = 300v^2 + (600g)(25) = 2.19 \times 10^5 \rightarrow v_C = 15.6 \text{ m/s}.$$

9. (II) 質量為 m 的物塊與彈簧連接，而在一粗糙的斜面上移動，如圖 8.21。起初物塊靜止，而彈簧未伸長。一個與斜面夾角為 α 的力 F 拉動物塊。寫出功-能定理的修正形式。

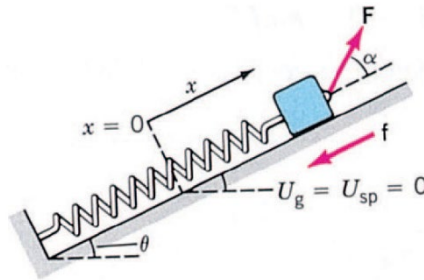


圖 8.21

答：

取 $U_{sp} = 0$ 於 $x = 0$ 處，由於運動是從 $x = 0$ 處開始，因此把 $U_g = 0$ 也設於此處很方便。機械能有三項：

$$E = K + U_g + U_{sp} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2 \quad (i)$$

注意 h 為垂直位移，而 x 則沿著斜面。事實上， $h = x \sin \theta$ 。已知 $K_i = 0$ ，而兩種 U 都設定為零；所以 $E_i = 0$ 。力 F 和摩擦力 f 都是非保守力。它們所作的功為

$$W_{nc} = Fx \cos \alpha - fx \quad (ii)$$

求得的方程式為 $E_f = 0 + W_{nc}$ ，其中 E_f 即為如(i)的式子。

10. (II) 一 500 g 的木塊從一垂直的彈簧上端高 60 cm 處落下彈簧的力常數 $k = 120 \text{ N/m}$ (見圖 8.22)。求最大壓縮量(你需要解一二次方程式)。

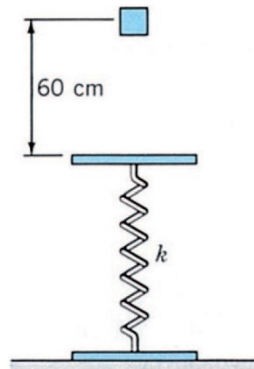


圖 8.22

答：

$$mg(x+0.6) = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow (0.5)(9.8)(x+0.6) = (1/2)(120)x^2$$

$$\rightarrow 60x^2 - 4.9x - 2.94 = 0 \rightarrow x = 26.6 \text{ cm}$$

11. (I) 一個 2 kg 的質點以 4 m/s 的初速率沿 $u_k = 0.6$ 的表面射出去。在下列各情形中，求其前進之距離：(a) 該表面為水平面；(b) 質點沿 30° 的斜面向上運動；(c) 質點沿 30° 的斜面向下運動。

答：

$$E_f - E_i = -fd$$

$$(a) -(1/2)mv^2 = -mgu_k d \rightarrow d = 1.36 \text{ m}$$

$$(b) mgd \sin \theta - (1/2)mv^2 = -mgu_k d \cos \theta \rightarrow d = 0.80 \text{ m}$$

$$(c) -mgd \sin \theta - (1/2)mv^2 = -mgu_k d \cos \theta \rightarrow d = 41.6 \text{ m}$$

12. (I) 一個 60 g 的網球以 24 m/s 垂直上拋，而到達 26 m 的最大高度。則阻力所作的功為何？

答：

$$E_i = 1/2 mv^2 = 17.3 \text{ J}$$

$$E_f = mgy = 15.3 \text{ J}$$

$$\rightarrow W_{NC} = E_f - E_i = 15.3 - 17.3 = -2.0 \text{ J}$$

13. (I) 一球以初速率 40 m/s 垂直向上發射，(a) 在哪一點 $K = U$ ？(b) 何處 $K = U/2$ ？

答：

$$(a) U = E/2 \rightarrow mgy = (1/2)(1/2)mv_i^2 \rightarrow y = 40.8 \text{ m}$$

$$(b) U = (2/3)E \rightarrow mgy = (2/3)(1/2)mv_i^2 \rightarrow y = 54.4 \text{ m}$$

14. (I) 一個固定的力 $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ N 作用於某質點，使其位置由 $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ m 移至 $-2\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$ m。求與此位移對應的位能變化。

答：

$$\Delta U = -\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = -(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) \cdot (-5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) = +40 \text{ J}$$

15. (I) 一 20 kg 的小孩從靜止開始滑下一 20° 長 4 m 的斜面且以 4 m/s 到達底部。動摩擦係數為何？

答：

$$\Delta E = W_{nc} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - mgd \sin \theta = -\mu mg \cos \theta d \rightarrow \mu = 0.147$$

16. (I) 從尼加拉瀑布每秒流下的水約為 $5 \times 10^6 \text{ kg}$ ，它的高度大約 50 m。 (a) 水每秒失去了多少位能？ (b) 假設 95% 的力學能轉換成電能，有多少個 100 W 燈泡能被點亮？

答：

(a) $mgh = (5 \times 10^6) \times 9.8 \times 50 = 2.45 \times 10^9 \text{ J/s}$

(b) $(2.45 \times 10^9) \times 0.95 / 100 = 2.33 \times 10^7 \text{ (個)}$