第 2 章　向量　本章習題 解答

1. (I) 圖 2.23 顯示向量 **C** 和 **D** 的大小為 $C = 4$ m，$D = 2.5$ m。求(a) **C** + **D**；(b) **C** – **D**。

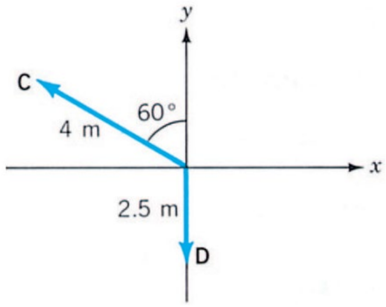


圖 2.23

答：

$\mathbf{C} = -4\sin 60°\mathbf{i} + 4\cos 60°\mathbf{j} = -3.46\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$\mathbf{D} = -2.5\mathbf{j}$

(a) $\mathbf{C} + \mathbf{D} = -3.46\mathbf{i} - 0.5\mathbf{j}$ m

(b) $\mathbf{C} - \mathbf{D} = -3.46\mathbf{i} + 4.5\mathbf{j}$ m

2. (I) 圖 2.24 顯示三個向量，令 $A = 1.5$ m，$B = 2$ m，$C = 1$ m。求：(a) **A** + **B** + **C**；(b) **A** – **B** – **C**。

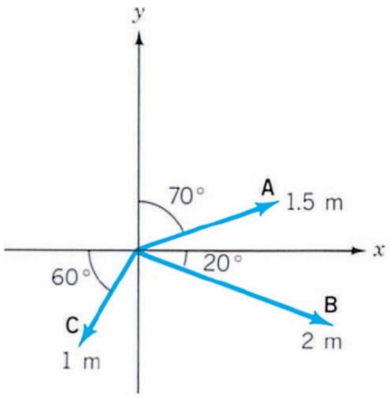


圖 2.24

答：

$\mathbf{A} = 1.5\cos 20°\mathbf{i} + 1.5\sin 20°\mathbf{j} = 1.41\mathbf{i} + 0.51\mathbf{j}$

$\mathbf{B} = 2\cos 20°\mathbf{i} - 2\sin 20°\mathbf{j} = 1.88\mathbf{i} - 0.68\mathbf{j}$

$\mathbf{C} = -\cos 60°\mathbf{i} - \sin 60°\mathbf{j} = -0.5\mathbf{i} - 0.87\mathbf{j}$

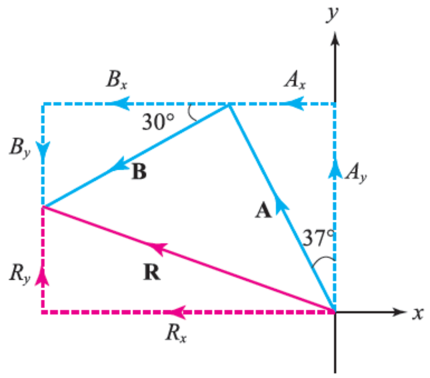
(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 2.79\mathbf{i} - 1.05\mathbf{j}$ m

(b) $\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C} = 0.03\mathbf{i} + 2.06\mathbf{j}$ m

3. 一人朝北偏西 37° 走了 4 m，又朝西偏南 30° 走了 3 m。他的淨位移大小及方向為何？

答：

右圖中的 x 與 y 軸分別為朝東與朝北。我們標示第一個位移為 **A**，第二個位移為 **B**、淨位移為 **R**。和 $\mathbf{R}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 的向量圖如右圖所示。



R 的分量為：

$$R_x = A_x + B_x = -4\sin 37° - 3\cos 30° = -5\ \text{m}$$
$$R_y = A_y + B_y = 4\cos 37° - 3\sin 30° = +1.69\ \text{m}$$

其大小為：$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=5.27\ \text{m}$

其方向由 $\tan\theta$ 決定：$\tan\theta=\dfrac{R_y}{R_x}=\dfrac{1.69}{-5}=-0.338$

向量和 **R** 的方向可由 $\tan\theta=R_y/R_x$ 求出。但由此可得相對 $+x$ 軸的兩個 θ 角度值，須依據 R_x 和 R_y 的正負號來作適當的選擇。

對應的角度為 161.32° 或 −18.68°。由於 R_x 為負，而 R_y 為正，因此向量在第二象限，故 $\theta=161.32°$。淨位移為 5.27 m，朝北偏西 71.32°。

4. (I) 四個向量的大小均為 2 m，如圖 2.25 所示。(a) 以單位向量符號來表示各向量。(b)將其向量和以單位向量符號表示。(c) 其向量和之大小與方向為何？

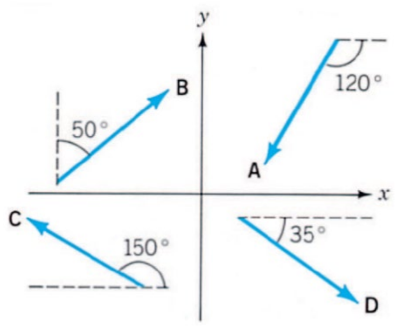


圖 2.25

答：

(a) $\mathbf{A}=-2\cos 60°\mathbf{i}-2\sin 60°\mathbf{j}=-\mathbf{i}-1.73\mathbf{j}$ m,

$\mathbf{B}=2\sin 50°\mathbf{i}+\cos 50°\mathbf{j}=1.53\mathbf{i}+1.29\mathbf{j}$ m,

$\mathbf{C}=-2\cos 30°\mathbf{i}+2\sin 30°\mathbf{j}=-1.73\mathbf{i}+\mathbf{j}$ m,

$\mathbf{D}=2\cos 35°\mathbf{i}-2\sin 35°\mathbf{j}=1.64\mathbf{i}-1.15\mathbf{j}$ m;

(b) $\mathbf{R}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}=0.44\mathbf{i}-0.59\mathbf{j}$ m;

(c) $R=\sqrt{(0.44)^2+(-0.59)^2}=0.74\ \text{m}$

$\tan\theta = \dfrac{-0.59}{0.44} \quad \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{-0.59}{0.44}\right) = -53.3°$

故在 0.74 m，朝東偏南 53.3°處

5. (I) 設兩向量，$\mathbf{C} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ m，$\mathbf{D} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ m，求：(a) $\mathbf{S} = \mathbf{C} - \mathbf{D}$；(b) S；(c) $\hat{\mathbf{S}}$。

答：

(a) $\mathbf{S} = (4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ m

(b) $S = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{84} = 9.17$ m

(c) $\hat{\mathbf{S}} = \dfrac{\mathbf{S}}{S} = 0.218\mathbf{i} + 0.436\mathbf{j} - 0.873\mathbf{k}$

6. (II) 兩向量 **A** 和 **B** 的大小各為 6 m 和 4 m。在下列合向量大小的情況下，求兩向量的夾角：(a) 最大合向量；(b) 最小合向量；(c) 3 m；(d) 8 m。(設 **A** 的方向為 x 軸)。

答：

(a) 0

(b) 180°

(c) $(6 + 4\cos\theta)^2 + (4\sin\theta)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -0.896 \quad \Rightarrow \quad \theta = 153°$

(d) $(6 + 4\cos\theta)^2 + (4\sin\theta)^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 0.25 \quad \Rightarrow \quad \theta = 75.5°$

7. 設向量 $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ m 且 $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ m，求：(a) $A + B$；(b) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$；(c) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$。

答：

(a) 注意所求者為向量大小的和，由方程式(2.8)可求出：

$A = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7.00$ m

$B = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = 3.74$ m

因此 $A + B = 10.7$ m。

(b) 向量和是：$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2+1)\mathbf{i} + (-3+2)\mathbf{j} + (6-3)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ m，

和的大小為 $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = 4.36$ m，

顯然地，和的大小並不等於大小的和。

(c) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$ m

8. (II) 一座鐘的時針長 6 cm。設時針中午 12 時在 y 軸上，下午 3 時則在 x 軸

上。求針尖在下列各段時間內的位移(以單位向量符號表示)：(a) 下午 1 時至 4 時；(b) 下午 2 時至 9 時 30 分。

答：

(a) $\mathbf{A} = 6\cos 60°\mathbf{i} + 6\sin 60°\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + 5.2\mathbf{j}$ m,

$\mathbf{B} = 6\cos 30°\mathbf{i} - 6\sin 30°\mathbf{j} = 5.21\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ m,

$\mathbf{B} - \mathbf{A} = 2.2\mathbf{i} - 8.2\mathbf{j}$ m

(b) $\mathbf{A} = 6\cos 30°\mathbf{i} + 6\sin 30°\mathbf{j} = 5.2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ m,

$\mathbf{B} = -6\cos 15°\mathbf{i} + 6\sin 15°\mathbf{j} = -5.8\mathbf{i} + 1.55\mathbf{j}$ m,

$\mathbf{B} - \mathbf{A} = -11.0\mathbf{i} - 1.45\mathbf{j}$ m

9. (I) 一直升機由停機坪上升 100 m，並沿西偏南 25° 方向水平飛行 200 m。其位移為何？

答：

$-200\cos 25°\mathbf{i} - 200\sin 25°\mathbf{j} + 100\mathbf{k} = -181\mathbf{i} - 84.5\mathbf{j} + 100\mathbf{k}$ m

10. (I) 向量 $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ 與 $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ 之間的夾角為何？

答：

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \cdot (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 2 - 6 = -4$

$\cos\theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/AB = (-4)/(5 \times 13)^{1/2} \quad \therefore \theta = 120°$

11. (I) 兩向量大小為 3 m 及 5 m，其點積為 $-4\ \text{m}^2$。求二者間之夾角？

答：

$-4 = 3 \times 5 \times \cos\theta \qquad \therefore \theta = 105°$

12. (I) 已知兩向量 $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$，求 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$。

答：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \\
&= (-\mathbf{k} - 5\mathbf{j}) + (-6\mathbf{k} + 10\mathbf{i}) + (-12\mathbf{j} - 4\mathbf{i}) \\
&= 6\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 7\mathbf{k}
\end{aligned}
$$