

第 10 章 質點系 本章習題 解答

1. 一划艇因失去划槳而在湖面上進退不得，艇上的人能不能只靠著在艇內作某些動作而使划艇前進？若能，解釋一下他可以作哪些動作。

答：略

2. 對任意一個三角形平板，將之細分成許多平行於某一邊的長條，你能說說看如何求此三角形的質心位置嗎？

答：略

3. (I) 找出下列分子的質心位置：(a) HCl，啞鈴形，如圖 10.13a。原子間距 $1.3 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，H 原子質量 1 u ，Cl 原子質量 35 u 。(b) H_2O ，形狀如圖 10.13b，O 原子質量 16 u ，H 跟 O 距離為 10^{-10} m ，鍵夾角 105° ？

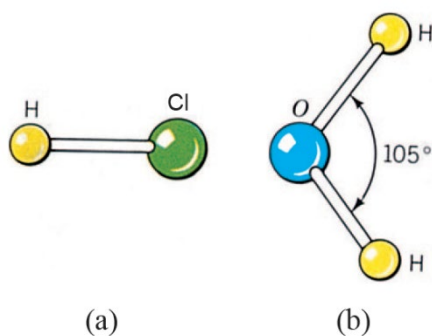


圖 10.13

答：

(a) $x_{\text{CM}} = 35(0.13 \text{ nm})/36 = 0.126 \text{ nm}$ from H

(b) $x_{\text{CM}} = 2(1)(0.1 \text{ nm})(\cos 52.5^\circ)/18 = 0.00676 \text{ nm} = 6.76 \text{ pm}$
 $y_{\text{CM}} = 0$ (from O along the line of symmetry).

4. (II) 半徑 R 的均勻圓盤，挖去了半徑 $R/2$ 的圓孔，如圖 10.14，求質心位置 (從原圓盤的圓心量起)(提示：將挖去的部分視其質量為負值)。

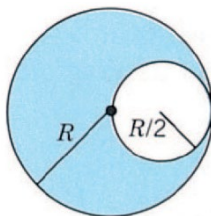


圖 10.14

答：

設圓盤密度 σ 為厚度為 t

$$m_1 = \sigma t(\pi R^2) \quad (0,0)$$

$$m_2 = \sigma t \left(\pi \frac{R^2}{4} \right) \quad \left(\frac{R}{2}, 0 \right)$$

$$X_{\text{cm}} = \frac{0 - \sigma t \left(\pi \frac{R^2}{4} \right) \left(\frac{R}{2} \right)}{\sigma t(\pi R^2) - \sigma t \left(\pi \frac{R^2}{4} \right)} = \frac{-\left(\frac{R}{8} \right)}{\left(\frac{3}{4} \right)} = -\frac{R}{6}$$

$$Y_{\text{cm}} = 0$$

另解

$$X_{\text{cm}} = [4M(0) - M(R/2)]/3M = -R/6 \quad (\text{圓心的左邊})$$

$$Y_{\text{cm}} = 0$$

5. (II) 邊長 $2R$ 的正方形，挖去了半徑 $R/2$ 的圓孔。相對於正方形中心而言，挖去之圓孔的圓心位置為 $(R/2, R/2)$ ，如圖 10.15。求質心位置(以正方形中心為準點)(提示：將挖去的部分視其質量為負值)。

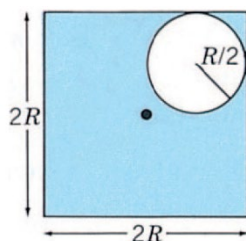


圖 10.15

答：

$$m_1 = \sigma(4R^2) \quad (0,0)$$

$$m_2 = \sigma \left(\pi \frac{R^2}{4} \right) \quad \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2} \right)$$

$$X_{\text{cm}} = \frac{0 - \sigma \left(\pi \frac{R^2}{4} \right) \left(\frac{R}{2} \right)}{\sigma(4R^2) - \sigma \left(\pi \frac{R^2}{4} \right)} = -0.122R$$

$$Y_{\text{cm}} = \frac{0 - \sigma \left(\pi \frac{R^2}{4} \right) \left(\frac{R}{2} \right)}{\sigma(4R^2) - \sigma \left(\pi \frac{R^2}{4} \right)} = -0.122R$$

6. xy 平面上三個質點的質量及位置如下：2 kg、 $(-2 \text{ m}, 3 \text{ m})$ ；3 kg、 $(-3 \text{ m}, 4 \text{ m})$ ；5 kg、 $(3 \text{ m}, -1 \text{ m})$ 。求質心位置。

答：

$$X_{\text{cm}} = \frac{2(-2) + 3(-3) + 5(3)}{2 + 3 + 5} = 0.2 \text{ (m)}$$

$$Y_{\text{cm}} = \frac{2(3) + 3(4) + 5(-1)}{2 + 3 + 5} = 1.3 \text{ (m)}$$

7. (I) Jack 的質量 75 kg，站在 $x = 0$ 的地方；Jill 質量 60 kg，站在 $x = 5 \text{ m}$ 的地方。他們兩個都是站在無摩擦的冰湖上的。當他們共同用力拉一條繩子時，Jill 前進了 1.5 m。求：(a) 這時兩人相距多遠？(b) 他們最後會在何處相遇？

答：

(a) 動量守恆： $0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \therefore m_1 v_1 = -m_2 v_2$

兩者受力時間 Δt 相同 $m_1 v_1 \Delta t = -m_2 v_2 \Delta t \Rightarrow 75x = -60(-1.5) \quad \therefore x = 1.2 \text{ (m)}$

兩者相距 $= 5 - 1.2 - 1.5 = 2.3 \text{ (m)}$

(b) $X_{\text{cm}} = \frac{75 \times 0 + 60 \times 5}{75 + 60} = 2.22 \text{ (m)}$

8. (I) 三個質點的瞬間位置及速度分別如圖 10.16 所示，求(a) 質心位置；(b) 質心速度；(c) 無外力作用下，3 秒後的質心位置？

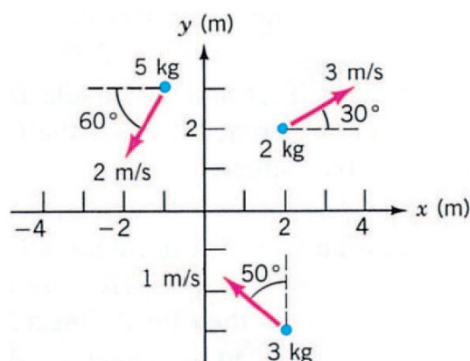


圖 10.16

答：

(a) $\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{(2 \times 2 + 3 \times 2 + 5 \times -1)\mathbf{i} + (2 \times 2 + 3 \times -3 + 5 \times 3)\mathbf{j}}{2 + 3 + 5} = 0.5\mathbf{i} + \mathbf{j} \text{ (m)}$

(b)

$$\mathbf{V}_{\text{CM}} = \frac{(2 \times 3 \cos 30^\circ + 3 \times -1 \sin 50^\circ + 5 \times -2 \cos 60^\circ)\mathbf{i} + (2 \times 3 \sin 30^\circ + 3 \times 1 \cos 50^\circ + 5 \times -2 \sin 60^\circ)\mathbf{j}}{2 + 3 + 5}$$

$$= -0.2\mathbf{i} - 0.37\mathbf{j} \text{ (m/s)}$$

(c) $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{\text{CM}} + \mathbf{V}_{\text{CM}} \times \Delta t = 0.5\mathbf{i} + \mathbf{j} + (-0.2\mathbf{i} - 0.37\mathbf{j}) \times 3 = -0.13\mathbf{i} - 0.11\mathbf{j} \text{ (m)}$

9. (I) 一質點 $m_1 = 2 \text{ kg}$ ，位置 $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \text{ m}$ ，速度 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} \text{ m/s}$ ；另一質點質量 $m_2 = 5 \text{ kg}$ ，位置 $\mathbf{r}_2 = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} \text{ m}$ ，速度 $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \text{ m/s}$ 。求：(a) $\mathbf{r}_{\text{CM}}$ ；(b) $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ ；(c) 總線動量；(d) 無外力存在的情況下，系統 2 秒後的質心位置。

答：

$$(a) \mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{(2 \times 2 + 5 \times -5)\mathbf{i} + (2 \times 3 + 5 \times 1)\mathbf{j}}{2 + 5} = -3\mathbf{i} + 1.57\mathbf{j} \text{ (m)}$$

$$(b) \mathbf{V}_{\text{CM}} = \frac{(2 \times -1 + 5 \times 3)\mathbf{i} + (2 \times 5 + 5 \times -4)\mathbf{j}}{2 + 5} = 1.86\mathbf{i} - 1.43\mathbf{j} \text{ (m/s)}$$

$$(c) \Sigma \mathbf{P} = 2(-\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) + 5(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = 13\mathbf{i} - 10\mathbf{j} \text{ (m/s)}$$

$$(d) \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{V}_{\text{CM}} \times \Delta t = -3\mathbf{i} + 1.57\mathbf{j} + (1.86\mathbf{i} - 1.43\mathbf{j}) \times 2 = 0.72\mathbf{i} - 1.29\mathbf{j} \text{ (m)}$$

10. (II) 一均勻木筏長 4 m，重 25 kg，前端距岸邊 6 m，上載一人，此人重 60 kg，最初站在木筏尾端。(a) 找出系統質心位置(以岸邊為原點)；(b) 當人由木筏尾走向前端後，他與岸邊相距多遠？(水的阻力不計)

答：

$$(a) x_{\text{CM}} = [25(2+6) + 60(4+6)]/85 = 9.41 \text{ (m)}$$

$$(b) 9.41 = [60d + 25(d + 2)]/85, \text{ 因此 } d = 8.82 \text{ (m)}$$

11. (II) 一物重 6 kg，從一高 100 m 的崖頂以 50 m/s 的初速度及 53° 的仰角射出。在它運動路徑上的某點，此物爆裂為兩片。其中一片質量 4 kg，觸地時距崖邊 200 m，設崖為垂直的，且兩片物體同時著地，則另一片的觸地位置應在何處？($g \approx 10 \text{ m/s}^2$)

答：

$$y = -100 = 50 \sin 53^\circ t - (1/2)10t^2, \text{ 故 } t = 10 \text{ s,}$$

$$\text{and range } R = 50 \cos 53^\circ (10) = 300 \text{ (m).}$$

$$x_{\text{CM}} = 300 = [(4)(200) + 2x]/6, \text{ leads to } x = 500 \text{ (m).}$$

12. (I) 一質點質量 $m_1 = 5 \text{ kg}$ ，速度 $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \text{ m/s}$ 。另一質點質量 $m_2 = 2 \text{ kg}$ ，速度 $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} \text{ m/s}$ 。此二質點在原點處相撞，求碰撞前 3 秒的質心位置。

答：

$$\mathbf{V}_{\text{cm}} = \frac{5 \times (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + 2 \times (-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})}{5 + 2} = \mathbf{i} + 0.57\mathbf{j} \text{ (m/s)}$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{V}_{\text{cm}} t \Rightarrow 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = \mathbf{r}_i + (\mathbf{i} + 0.57\mathbf{j}) \times 3$$

$$\mathbf{r}_i = -3\mathbf{i} - 1.71\mathbf{j} \text{ (m)}$$

13. (II) 一質點 $m_1 = 0.8 \text{ kg}$ ，以 $3\mathbf{i} \text{ m/s}$ 的速度運動；另一質點 $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ ，以 $-5\mathbf{i} \text{ m/s}$ 的速度運動。求(a) $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ ；(b) 兩質點相對於質心之速度各為何？(c) 總動能；(d) 質心動能；(e) 相對於質心之動能。

答：

- (a) $\mathbf{v}_{CM} = (2.4\mathbf{i} - 6\mathbf{i})/2 = -1.8\mathbf{i}$;
 (b) $\mathbf{u}_1 = 3 - (-1.8) = 4.8\mathbf{i}$; $\mathbf{u}_2 = -5 - (-1.8) = -3.2\mathbf{i}$;
 (c) $K = (1/2)0.8(3)^2 + (1/2)1.2(5)^2 = 3.6 + 15 = 18.6 \text{ J}$;
 (d) $K_{CM} = 1/2(2)(1.8)^2 = 3.24 \text{ J}$;
 (e) $K = 1/2[(0.8)(3 - (-1.8))^2 + (1.2)(-5 - (-1.8))^2]$
 $= 1/2[(0.8)(4.8)^2 + (1.2)(3.2)^2] = 9.22 + 6.14 = 15.36 \text{ J}$

14. (II) 一質點質量 $m_1 = 4 \text{ kg}$ ，速度 $6\mathbf{i} \text{ m/s}$ ；另一質點質量 $m_2 = 2 \text{ kg}$ ，速度 $3\mathbf{i} \text{ m/s}$ 。兩質點作完全彈性碰撞，求：(a) $\mathbf{v}_{CM}$ ；(b) 碰撞前各質點相對於質心之速度；(c) 碰撞後各質點相對於質心之速度。

答：

- (a) $\mathbf{v}_{CM} = (24\mathbf{i} + 6\mathbf{i})/6 = 5\mathbf{i} \text{ m/s}$;
 (b) $\mathbf{v}_1' = (6 - 5)\mathbf{i} = \mathbf{i} \text{ m/s}$, $\mathbf{v}_2' = (3 - 5)\mathbf{i} = -2\mathbf{i} \text{ m/s}$
 (c) $v_2 - v_1 = -(u_2 - u_1) = +3$ (接近速度 = 遠離速度)
 且 $4v_1 + 2v_2 = 30$ (動量守恆)
 因此 $v_1 = 4 \text{ m/s}$, $v_2 = 7 \text{ m/s}$
 $\mathbf{v}_1' = (4 - 5)\mathbf{i} = -\mathbf{i} \text{ m/s}$; $\mathbf{v}_2' = (3 - 5)\mathbf{i} = -2\mathbf{i} \text{ m/s}$

15. (II) 一質點 $m_1 = 5 \text{ kg}$ ，以 $4\mathbf{j} \text{ m/s}$ 之速度與另一靜止之質點 $m_2 = 3 \text{ kg}$ 發生一維的完全彈性碰撞。求：(a) 相對於質心之動能；(b) 質心動能。

答：

- $\mathbf{v}_{CM} = [4 \times 5\mathbf{j} + 0]/8 = 2.5\mathbf{j} \text{ m/s}$
 故 $\mathbf{v}_1' = (4 - 2.5)\mathbf{j} = 1.5\mathbf{j} \text{ m/s}$ ，且 $\mathbf{v}_2' = (0 - 2.5)\mathbf{j} = -2.5\mathbf{j} \text{ m/s}$
 (a) $K_{Rel} = 1/2(3)(2.5)^2 + 1/2(5)(1.5)^2 = 15 \text{ J}$
 (b) $K_{CM} = 1/2(8)(2.5)^2 = 25 \text{ J}$