

## 第 11 章 剛體的定軸轉動 本章習題 解答

1. (a) 如何由旋轉蛋來分辨其為煮熟的或是生的？(b) 在它們旋轉之後，若把它們抓住一會兒再放開會如何？請解釋。

答：略

2. 圖 11.28 中的書和這本課本相同，其對哪個軸的轉動慣量(a) 最大；(b) 最小？

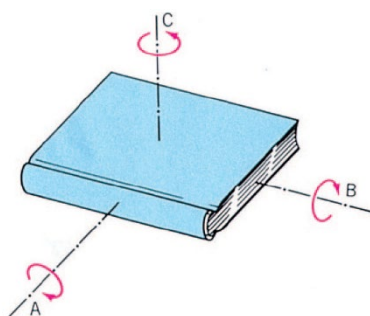


圖 11.28

答：略

3. (I) 直徑 30 cm 的轉台由靜止經 2 秒到達末轉速  $33\frac{1}{3}$  rpm。求：(a) 角加速度；(b) 5 秒內所轉圈數；(c) 繞兩圈所需的時間；(d)  $t = 1$  秒時邊上的徑向及切線加速度；(e) 若  $t = 3$  秒重做(d)。

答：

注意此題 2 秒後等角速度旋轉  $\omega = 33\frac{1}{3} \text{ rpm} = 3.49 \text{ rad/s}$

(a)  $\omega = \omega_0 + \alpha t$ ,  $3.49 = \alpha \times 2 \therefore \alpha = 1.745 \text{ r/s}^2$ ; (1.16)

(b)  $\theta_1 = 1/2 \alpha t^2 = 1/2 (1.745)(2)^2 = 3.49 \text{ rad}$ ,  $\theta_2 = 3 \times 3.49 = 10.47 \text{ rad}$ ,

$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 3.49 + 10.47 = 13.96 \text{ rad} = 2.22 \text{ rev}$

(c) 前 2 秒繞 3.49 rad  $\theta = 2(2\pi) = 3.49 + 3.49 t_2 \therefore t_2 = 2.6$ .  $t = 2 + 2.6 = 4.6 \text{ s}$

(d)  $t = 1 \text{ s}$ ,  $\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + 1.745 \times 1 = 1.745 \text{ r/s}$ ,

$a_r = \omega^2 r = 0.46 \text{ m/s}^2$ ;  $a_t = \alpha r = 0.26 \text{ m/s}^2$ .

(e)  $t = 2 \text{ s}$  後等角速度旋轉,  $\omega = 3.49 \text{ rad/s}$ ,

$a_r = \omega^2 r = 3.49^2 (0.15) = 1.83 \text{ m/s}^2$ ;  $a_t = 0$

4. (I) 直徑 30 cm 的 LP (唱片) 以 45 rpm 唱了 20 分。(a) 求起始點的速率，其  $r = 14.5 \text{ cm}$ ；(b) 唱完時的速率，此時  $r = 6.2 \text{ cm}$ ；(c) 唱針的徑向量；(d) 唱片溝的平均寬度。

答：

$$\omega = \frac{45(2\pi)}{60} = 4.71 \text{ rad/s}$$

$$(a) v = r\omega = 0.145 \times 4.71 = 0.683 \text{ m/s}$$

$$(b) v = r\omega = 0.062 \times 4.71 = 0.292 \text{ m/s}$$

$$(c) v = \Delta r / t = (0.062 - 0.145) / 20(60) = -6.92 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$(d) 45 \text{ rpm 轉了 } 20 \text{ 分共轉 } 900 \text{ 圈前進距離為 } (0.145 - 0.062) = 0.083 \text{ m}$$

$$\text{所以唱片溝的寬度為 } 0.083/900 = 9.22 \times 10^{-5} \text{ m}$$

5. (I) 求下列各點相對於地心的速率：(a) 基多(Quito，厄瓜多首都) 約在赤道；

(b) 紐約市，緯度  $41^\circ$ ，地球半徑  $6370 \text{ km}$ 。

答：

$$(a) \omega = \frac{2\pi}{1 \text{ d}} = \frac{2\pi}{(1 \text{ d}) \left( \frac{24 \text{ h}}{\text{d}} \right) \left( \frac{60 \text{ min}}{\text{h}} \right) \left( \frac{60 \text{ s}}{\text{min}} \right)} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$v = \omega R = (7.27 \times 10^{-5})(6370 \times 10^3) = 463 \text{ m/s}$$

$$(b) v = \omega R \cos 41^\circ = 349 \text{ m/s}$$

6. (I) 一質點以角速度  $\omega$  及角加速度  $\alpha$  繞一半徑為  $r$  的圓運動。證明總線加速度為  $a = r(\omega^4 + \alpha^2)^{1/2}$ 。

答：

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{\omega^4 r^2 + \alpha^2 r^2}$$

7. (I) 一時鐘秒針長  $8 \text{ cm}$ 。求針尾端的(a) 角速度；(b) 線速率。

答：

$$(a) \omega = 2\pi / 60 = \pi/30 \text{ rad/s};$$

$$(b) v = \omega r = 0.838 \text{ cm/s}$$

8. (I) 一車的輪半徑為  $20 \text{ cm}$ 。初時其以  $120 \text{ rpm}$  旋轉，下一分鐘它轉了  $90$  圈。(a) 角加速度為何？(b) 在車停下前又再走了多遠？設沒有滑動。

答：

$$(a) \Delta\theta = \omega_0 t + 1/2 \alpha t^2, \text{ 因此 } (90 \times 2\pi) = 4\pi(60) + 1/2 \alpha (60)^2,$$

$$\text{故 } \alpha = -\pi/30 = -0.105 \text{ rad/s}^2.$$

$$(b) t = 60 \text{ s}, \omega = \omega_0 + \alpha t = 4\pi - (\pi/30)(60) = 2\pi \text{ rad/s}.$$

$$0^2 = (2\pi)^2 + 2(-0.105)\theta \quad \therefore \theta = 188 \text{ rad}$$

$$S = r\theta = 0.2 \times 188 = 37.6 \text{ m}$$

9. (II) 一車其輪半徑  $25 \text{ cm}$ ，在  $10 \text{ s}$  內由靜止加速至  $30 \text{ m/s}$ 。當車速率為  $2 \text{ m/s}$

時，求輪頂相對於(a) 輪心；(b) 道路的加速度。

答：

$$(a) 30 = 0 + a(10), \quad a = 3 \text{ m/s}^2, \quad \text{因此 } a_t = 3 \text{ m/s}^2 = \alpha r. (\alpha = a_t/r = 12 \text{ rad/s}^2)$$

$$a_r = v^2/r = 16 \text{ m/s}^2 (\text{向下}), \quad \text{因此 } \mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 16\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

$$(b) a_t = \alpha(2r) = 6 \text{ m/s}^2, \quad a_r = (2v)^2/2r = 32 \text{ m/s}^2$$

$$\text{故 } \mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 32\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

10. (I) 一皮帶傳動的唱盤，其皮帶緊繞其中樞(半徑 3 cm) 及馬達中樞。若唱盤以  $33\frac{1}{3}$  rpm 轉動而馬達以 60 rpm 轉動，問其中樞半徑為何？

答：

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad r_2 = \frac{100}{60} = 1.67 \text{ (cm)}$$

11. (II) 一輪如圖 11.29 所示，有一半徑為 2 m 的中軸，質量 2 kg。四根輻條長 4 m 質量 1 kg。外環半徑 6 m 質量 2 kg。視中軸為圓盤，求對過其輪心且垂直於輪子的軸，轉動慣量為何？

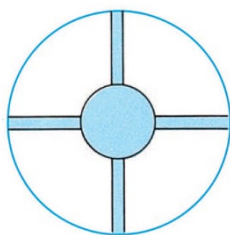


圖 11.29

答：

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} m r_1^2 + 4 \times \left( \frac{m_2 L^2}{12} + m \times 2^2 \right) + m_3 r_3^2 \\ &= \frac{1}{2} (2)(4) + (4) \left( \frac{16}{12} + 16 \right) + (2)(6^2) = 145 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2) \end{aligned}$$

12. (I) 兩質點，質量分別為 2 kg 及 5 kg，由長 2 m 的輕棒連結，求垂直此棒且通過(a) 中點及(b) 質心處的轉動慣量。

答：

$$(a) I = 7 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$(b) X_{\text{cm}} = \frac{2(0) + 5(2)}{7} = \frac{10}{7}$$

$$I_{\text{cm}} = 2\left(\frac{10}{7}\right)^2 + 5\left(\frac{4}{7}\right)^2 = 5.71 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}$$

13. (II) 下列各平面物由相同的細線組成，求其繞中心垂直軸的轉動慣量：(a) 一直徑為  $2a$  的圓；(b) 一邊長  $2a$  的正方形；(c) 等邊三角形每邊  $2a$ 。線單位長的質量為  $\lambda$ 。

答：

(a)  $ma^2 = 2\pi\lambda a^3 = 6.28\lambda a^3$

(b)  $4m\left(\frac{L^2}{12} + a^2\right) = \frac{32}{3}\lambda a^3 = 10.7\lambda a^3$

(c)  $(3)(2\lambda a)(4a^2) \times \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) = 4\lambda a^3$

14. (II) 水分子氫、氧原子間距為  $9 \times 10^{-11} \text{ m}$ ，各原子質量為  $m_{\text{O}} = 16 m_{\text{H}}$ ，其中  $m_{\text{H}} = 1.67 \times 10^{-27}$ 。兩 H-O 鍵夾角為  $105^\circ$  (見圖 11.30)。求分子對下列軸的轉動慣量。(a) 沿一 H-O 鍵，及(b) 過 O 原子且平行於兩 H 原子聯線的軸。

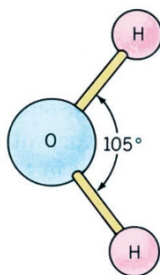


圖 11.30

答：

(a)  $I = 1.67 \times 10^{-27} (9 \times 10^{-11} \sin 105^\circ)^2 = 1.26 \times 10^{-47} \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}$

(b)  $I = 2 \times 1.67 \times 10^{-27} (9 \times 10^{-11} \cos 52.5^\circ)^2 = 1.0 \times 10^{-47} \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}$

15. (I) 地球自轉的動能為何？因地球非均勻球體，其轉動慣量  $I = 0.33 MR^2$ 。

答：

$$I = 0.33 MR^2 = 8.01 \times 10^{37} \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}$$

$$\omega = 2\pi / 1 \text{ d} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ (rad/s)}$$

$$K = 1/2 I \omega^2 = 2.12 \times 10^{29} \text{ (J)}$$

16. (II) 一老爺鐘的鐘擺為一質量  $1.2 \text{ kg}$  的均勻棒，長  $60 \text{ cm}$ 。其末端有一半徑  $5 \text{ cm}$  而質量  $0.4 \text{ kg}$  的圓盤，如圖 11.31。鐘擺由與鉛直夾  $30^\circ$  角釋放，(a) 其對棒頂轉軸的轉動慣量為何？(b) 當棒鉛直時，其最低點的速率為何？

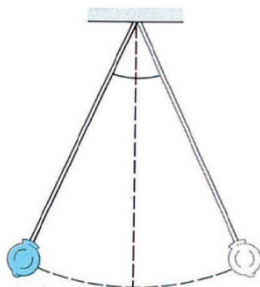


圖 11.31

答：

$$(a) I = \left( \frac{1.2 \times 0.6^2}{12} + 1.2 \times 0.3^2 \right) + \left( \frac{1}{2} \times 0.4 \times 0.05^2 + 0.4 \times 0.65^2 \right) = 0.314 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$(b) E_i = (M_r g L/2 + M_d g l)(1 - \cos \theta) = 0.814 \text{ J}$$

$$E_f = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (0.314) \omega^2, \text{ 求得 } \omega = 2.28 \text{ rad/s},$$

$$\text{因此 } v = 0.7(2.28) = 1.59 \text{ (m/s)}$$

17. (I) 一轉動慣量為  $0.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  的車輪在  $5 \text{ s}$  內由靜止加速到  $20 \text{ rad/s}$ 。當外力矩除去後，輪在  $1 \text{ min}$  後停止。求：(a) 摩擦力矩；(b) 外力矩。

答：

$$(a) \alpha = -1/3 \text{ rad/s}^2, \quad \tau_f = I\alpha = 0.01 \text{ N} \cdot \text{m};$$

$$(b) 20 = 0 + \alpha(5), \quad \alpha = 4$$

$$\tau_E - \tau_f = I(4 \text{ rad/s}^2), \quad \text{因此 } \tau_E = 0.13 \text{ N} \cdot \text{m}$$

18. (II) 一飛輪初以  $1200 \text{ rpm}$  轉動，在只受摩擦力作用下於  $4 \text{ min}$  停止。若另施一外力矩  $300 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，它經  $1 \text{ min}$  就停。(a) 此輪的轉動慣量為何？(b) 摩擦力矩多少？

答：

$$(a) \omega_0 = 40\pi \text{ rad/s}, \quad 0 = 40\pi + \alpha_1 4(60), \quad \alpha_1 = -\pi/6 \text{ (rad/s}^2),$$

$$0 = 40\pi + \alpha_2 (60), \quad \alpha_2 = -4\pi/6 \text{ (rad/s}^2)$$

$$\alpha_1 = \tau_f/I \text{ 以及 } \alpha_2 = (\tau_f + 300)/I, \text{ 可求得 } I = 191 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$(b) \tau_f = I\alpha_1 = -100 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

19. (I) 求圖 11.32 中各力對此支點的力矩。 $F_1 = 10 \text{ N}$ ， $F_2 = 15 \text{ N}$ ， $F_3 = 8 \text{ N}$ ，而  $L = 8 \text{ m}$ 。

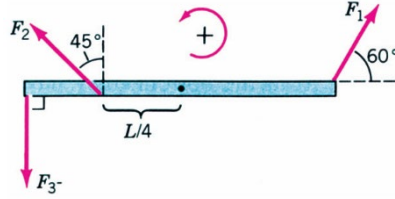


圖 11.32

答：

$$\tau_1 = 4 \times 10 \sin 60^\circ = 34.64 \text{ N} \cdot \text{m} (\text{逆時鐘})$$

$$\tau_2 = 2 \times 15 \cos 45^\circ = 21.21 \text{ N} \cdot \text{m} (\text{順時鐘})$$

$$\tau_3 = 4 \times 8 \sin 90^\circ = 32 \text{ N} \cdot \text{m} (\text{逆時鐘})$$

20. (II) 一實心圓柱質量  $M$  半徑  $R$  繞在一垂直的線上如圖 11.33。(a) 利用能量法證明此柱由靜止落下  $h$  後，其速率為  $\sqrt{4gh/3}$ ；(b) 由(a) 中結果求其質心線加速度；(c) 用動力學法求此柱的線加速度；(d) 線的張力為何？(e) 須用多大的力拉線使此柱自旋卻不落下？此時柱的角加速度為何？

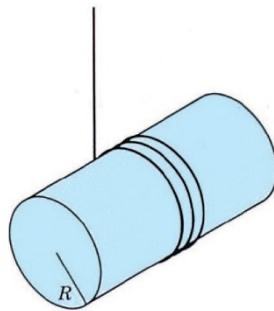


圖 11.33

答：

(a)  $Mgh = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} MR^2 \right) \omega^2$  leads to  $v = (4gh/3)^{1/2}$ ;

(b)  $v^2 = 2gh$ , thus  $a = 2g/3$ ;

(c) Take  $\tau$  about the point of contact with the string.

$$\tau = I\alpha: mgR = \left( \frac{3}{2} MR^2 \right) (a/R), \text{ thus } a = 2g/3;$$

(d)  $mg - T = ma$ , thus  $T = mg/3$ ;

(e) Need  $T = mg$ . Take  $\tau$  about the center:

$$\tau = I\alpha: TR = \left( \frac{1}{2} MR^2 \right) \alpha, \text{ leads to } \alpha = 2g/R.$$

21. (II) 一實心圓柱從一斜面上只滾不滑而下。(a) 求其質心加速度；(b) 要避免滑動的最小摩擦係數為何？

答：

(a)  $mgsin \theta - f = ma$ ;  $fR = I\alpha$  which leads to  $f = Ma/2$ .

Solving to find  $a = 2g \sin \theta / 3$ .

(b)  $f = Ma/2 = mg \sin \theta/3 = \mu(mg \cos \theta)$ . Thus  $\mu = \tan \theta/3$ .

22. (I) 一桶 15 kg 的水由井中以 20 cm/s 等速上升。吊繩繞在一半徑 3 cm 的圓柱，而以一長 40 cm 的把手在轉動它。如圖 11.34。(a) 要使桶上升的功率為何？(b) 若作用力恆垂直於把手，此力多大？

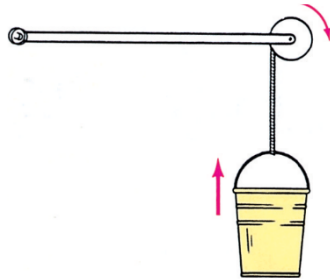


圖 11.34

答：

(a)  $P = mgv = 15 \times 9.8 \times 0.2 = 29.4$  (W);

(b)  $F(0.4) = mg(0.03) = 15 \times 9.8 \times 0.03 = 4.41$ , thus  $F \approx 11$  (N).