

第4章 平面運動 本章習題 解答

1. (I) 質點的位置為時間的函數： $\mathbf{r} = (3t^2 - 2t)\mathbf{i} - t^3\mathbf{j}$ m。求：(a) 在 $t = 2$ s 的速度；(b) 在 4 s 時的加速度；(c) 在 $t = 1$ s 到 $t = 3$ s 間的平均加速度。

答：

$$\mathbf{r} = (3t^2 - 2t)\mathbf{i} - t^3\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = (6t - 2)\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 6t\mathbf{j}$$

$$(a) t = 2\text{ s}, \mathbf{v} = (6t - 2)\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j} = 10\mathbf{i} - 12\mathbf{j} \text{ m/s}$$

$$(b) t = 4\text{ s}, \mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} = 6\mathbf{i} - 24\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

$$(c) t = 1 \sim 3\text{ s}, \mathbf{a}_{\text{av}} = \frac{(16\mathbf{i} - 27\mathbf{j}) - (4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})}{3 - 1} = 6\mathbf{i} - 12\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

2. (I) 某車以 20 m/s 向東行駛 10 s，再以 10 m/s 向北行駛 15 s。求其：(a) 行經之距離；(b) 位移；(c) 平均速度；(d) 平均速率；(e) 平均加速度。

答：

$$(a) |20 \times 10| + |10 \times 15| = 350 \text{ m};$$

$$(b) \mathbf{r} = (20 \times 10)\mathbf{i} + (10 \times 15)\mathbf{j} = 200\mathbf{i} + 150\mathbf{j} \text{ m}, \text{ 距離} = 250 \text{ m}, 37^\circ \text{ 朝北偏東}$$

$$(c) \mathbf{v} = \frac{200\mathbf{i} + 150\mathbf{j}}{(10 + 15)} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} \text{ m/s}, \text{ 位移} = 10 \text{ m/s}, 37^\circ \text{ 朝北偏東}$$

$$(d) v = 350/25 = 14 \text{ m/s};$$

$$(e) \mathbf{a}_{\text{av}} = (10\mathbf{j} - 20\mathbf{i})/25 = -0.8\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

3. (II) 一鏢槍水平瞄準 3 m 外的靶，(a) 若鏢射到靶以下 5 cm，問槍口射出時，鏢速度多少？(b) 槍應對準水平線以上多大角度才能射中靶？

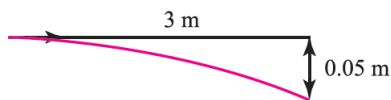


圖 4.21

答：

$$(a) \text{ 由 } x = 3 = v_0 t, \text{ 及 } \Delta y = -0.05 = -4.9t^2, \text{ 可求得 } v_0 = 29.7 \text{ m/s}$$

$$(b) \text{ 由例題 4.2, } \sin 2\theta = \frac{Rg}{v_0^2} = 0.0333, \text{ 因此 } \theta = 0.95^\circ$$

4. (II) 棒球以 30 m/s 之水平初速投向 18.3 m 外的捕手。問(a) 當球被捕手接到時低於發射高度多少？(b) 若要達到與發射點同一高度的捕手位置，球應對準發射點以上多高投出？

答：

(a) $18.3 = 30t$, $t = 0.61 \text{ s}$, $y = -4.9(0.61)^2 = -1.82 \text{ m}$

(b) $R = 18.2 = (20^2 \sin 2\theta / 9.8)$, $\theta = 5.75^\circ$

5. (II) 籃球以 45° 仰角丟出，設籃框在 4 m 外，且高度為丟出點上方 0.8 m，問初速率應為多少才能射中？

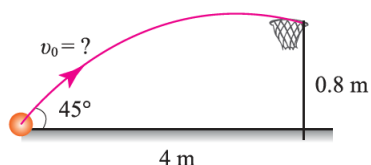


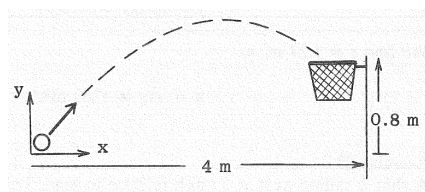
圖 4.22

答：

參考右圖座標系統，

$$x = 4 \text{ m} = v_0 \cos 45^\circ t \quad (\text{i})$$

$$y = 0.8 \text{ m} = v_0 \sin 45^\circ t - 4.9t^2 \quad (\text{ii})$$



將 $t = \frac{4}{v_0 \cos 45^\circ}$ 代入(ii)，可求得初速率

$$v_0 = 7 \text{ m/s}$$

6. (I) 一質點在周長 8 m 的圓周上等速轉動，每秒轉 5 圈，其向心加速度多大？

答：

利用圓周長求半徑，再求質點的等速率，並由 4.13 式可求得向心加速度。

圓周長 $2\pi r = 8$, $r = 1.27 \text{ m}$

$$v = \frac{\text{距離}}{\Delta t} = \frac{5 \times 8 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 40 \text{ m/s}, \quad \mathbf{a} = \frac{v^2}{r} = \frac{40^2}{1.27} = 1260 \text{ m/s}^2$$

7. (I) 球從 1 m 高的桌子滾下來，掉在 1.6 m 外的地板上。求其(a) 初速率；(b) 飛行時間。

答：

由 $1.6 = v_0 t$ ，且 $-1 = -4.9t^2$ ，可求得 $t = 0.452 \text{ s}$ 以及 $v_0 = 3.54 \text{ m/s}$

8. 鏢槍從 2 m 的高度以 30° 仰角射出，在 42 m 外著地，問：(a) 初速率；(b) 飛行時間；(c) 飛行最大高度各多少？

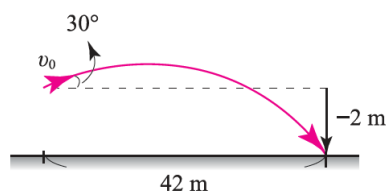


圖 4.23

答：

$$(a) \text{ 由 } \begin{cases} x = 42 = v_0 \cos 30^\circ t & (i) \\ y = 0 = 2 + v_0 \sin 30^\circ t - 4.9t^2 & (ii) \end{cases},$$

利用 $t = \frac{42}{v_0 \cos 30^\circ}$ 代入(ii)，可求得初速率 $v_0 = 21.0 \text{ m/s}$

(b) 由(a) 可求得 $t = 2.31 \text{ s}$

$$(c) \Delta y = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} = 5.63 \text{ m}, \text{ 因此最大高度為 } 7.63 \text{ m}$$

9. (I) 圓錐擺的繩端所繫擺錘以 1.21 m/s 的等速率沿水平的圓形運動(參見圖 4.24)。若繩長為 1.2 m ，與垂直線的夾角為 20° ，求擺錘的向心加速度。

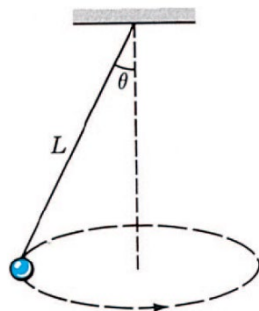


圖 4.24

答：

由 $r = 1.21 \sin 20^\circ = 0.41 \text{ m}$ ，可得 $a = (1.21)^2 / (0.41) = 3.57 \text{ m/s}^2$ 。

10. (I) (a) 物體 A 的速度為 $2\mathbf{i} + \mathbf{j} \text{ m/s}$ ，物體 B 的速度為 $-\mathbf{i} + 5\mathbf{j} \text{ m/s}$ 。B 相對於 A 的速度為何？(b) 物體 A 以 3 m/s 向東運動，而物體 B 則以 4 m/s 向北運動。A 相對於 B 的速度為何？

答：

$$(a) \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \text{ m/s}$$

$$(b) \mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \text{ m/s}$$

($\mathbf{v}_A$ 與 $\mathbf{v}_B$ 均相對於地面)

11. (I) 一船能以 4 m/s 相對於靜止的水面航行。它必須橫渡以 3 m/s 向東流的河面。河寬 100 m 。(a) 若船直接朝對岸航行，則渡河需時多久？(b) 若要到

達正對岸，船應朝什麼方向？需時多久？

答：

(a) $t = 100 \text{ m} / (4 \text{ m/s}) = 25 \text{ s}$;

(b) $\sin \theta = 3/4$, 則 $\theta = 48.6^\circ$ 朝北偏西 ,

且 $t = 100 \text{ m} / (2.65 \text{ m/s}) = 37.8 \text{ s}$

12. (I) 雨水以 10 m/s 的定速垂直下落。一試管安裝在以 20 m/s 前進的軌道車上。試管應傾斜幾度，雨水才不會滴到管側？

答：

$\mathbf{v}_{RC} = \mathbf{v}_{RG} + \mathbf{v}_{GC}$, 則 $\tan \theta = \mathbf{v}_{RG} / \mathbf{v}_{GC} = 10/20$, $\theta = 26.6^\circ$

因此水平朝上 26.6°

13. (I) 一質點的發射角為 $45^\circ + \alpha$, 另一為 $45^\circ - \alpha$, 兩質點的著地點都與發射

點同高，證明兩者的飛行時間相差： $T_2 - T_1 = \frac{2\sqrt{2}v_0 \sin \alpha}{g}$ 。

答：

$x_1 = v_0 \cos(45 - \alpha)T_1$, $x_2 = v_0 \cos(45 + \alpha)T_2$

$y_1 = [v_0 \sin(45 - \alpha)]T_1 - \frac{1}{2}gT_1^2$, $y_2 = [v_0 \sin(45 + \alpha)]T_2 - \frac{1}{2}gT_2^2$

當 $y_1 = 0$ 時， $T_1 = \frac{2v_0 \sin(45 - \alpha)}{g}$; 當 $y_2 = 0$ 時， $T_2 = \frac{2v_0 \sin(45 + \alpha)}{g}$

$T_2 - T_1 = \frac{2v_0 \sin(45 + \alpha)}{g} - \frac{2v_0 \sin(45 - \alpha)}{g} = \frac{2v_0}{g}(2 \cos 45 \sin \alpha)$

故 $T_2 - T_1 = \frac{2\sqrt{2}v_0 \sin \alpha}{g}$

14. (I) 一足球員以 15 m/s 與 20° 仰角把球踢向隊友。隊友應以多大速率奔跑才能在球剛要落地時趕到接球？兩球員起初的距離為 25 m 。

答：

$R = 15^2 \sin 2\theta / g = 14.75 \text{ m}$,

$t = (2v_0 \sin \theta) / g = (2 \cdot 15 \sin (20)) / 9.8 = 1.047 \text{ s}$,

$v = (25 - 14.75) / 1.047 = 9.78 \text{ m/s}$